

Frå sist: Strategi for numerisk integrasjon:
 Tilpasse på delintervaller med forskjellige
 interpolerende polynomer (Newton-Cotes metode)

Teorem 4.9 Hvis f er $k+1$ ganger kont. deriverbar,
 så oppfyller feilen i Newton-Cotes metoden
 med orden k fra strategien $\max_{x \in [a, b]} |f^{(k+1)}(x)|$

$$\left| \int_a^b f(x) dx - I(h) \right| \leq \frac{(b-a) M_{k+1} h^{k+1}}{(k+1)!}$$

Beris: La J_i være i 'te delintervall, og $p_{k,i}$
 interpolerende polynom av orden k på J_i
 ($p_{k,i}$ interpolerer i $\{x_{i-1/2}, \dots, x_{i+1/2}\}$)
 Vi setter $h = \frac{b-a}{n}$

Fra Teorem 2.8: $|f(x) - p_{k,i}(x)| \leq \frac{M_{k+1}}{(k+1)!} h^{k+1}$

$$\left| \int_a^b f(x) dx - I(h) \right| = \left| \sum_{i=1}^n \int_{J_i} f(x) dx - \sum_{i=1}^n \int_{J_i} p_{k,i}(x) dx \right|$$

$$= \left| \sum_{i=1}^n \left(\int_{J_i} (f(x) - p_{k,i}(x)) dx \right) \right|$$

$$\leq \sum_{i=1}^n \left| \int_{J_i} (f(x) - p_{k,i}(x)) dx \right|$$

$$\leq \sum_{i=1}^n \int_{J_i} |f(x) - p_{k,i}(x)| dx$$

$$\leq \sum_{i=1}^n \int_{J_i} \frac{M_{k+1}}{(k+1)!} h^{k+1} dx$$

$$= n h \frac{M_{k+1}}{(k+1)!} h^{k+1} = \frac{(b-a) M_{k+1}}{(k+1)!} h^{k+1} \quad \left(h = \frac{b-a}{n} \Rightarrow nh = b-a \right)$$

Trapesmetoden ($k=1$)

På hvert delintervall $[x_{i-1}, x_i]$ interpolerer vi i x_{i-1} og x_i .

$$p_{i,1}(x) = f(x_{i-1}) + \frac{f(x_i) - f(x_{i-1})}{x_i - x_{i-1}} (x - x_{i-1})$$

$$\int_{x_{i-1}}^{x_i} p_{i,1}(x) dx = \left[f(x_{i-1})(x - x_{i-1}) + \frac{f(x_i) - f(x_{i-1})}{(x_i - x_{i-1})} \frac{1}{2} (x - x_{i-1})^2 \right]_{x_{i-1}}^{x_i}$$

$$= f(x_{i-1})h + \frac{f(x_i) - f(x_{i-1})}{h} \frac{1}{2} h^2$$

$$= \frac{f(x_{i-1}) + f(x_i)}{2} h$$

Legger sammen alle disse:

$$h \sum_{i=1}^n \frac{f(x_{i-1}) + f(x_i)}{2} = h \left(\frac{f(a) + f(b)}{2} + \sum_{i=1}^{n-1} f(x_i) \right),$$

Som er formelen for trapesmetoden.

Feilestimat fra teorem 4.9:

$$\left| \int_a^b f(x) dx - T(h) \right| \leq \frac{(b-a) M_2}{2} h^2$$

Oppgave 7: Feilen er faktisk $\leq \frac{(b-a) M_2}{12} h^2$ (6 ganger mindre midtpunkt gir haluparten)

Eksempel: Finn en tilnærming til $\int_0^2 x^2 dx$ med trapesmetoden med 4 delintervaller.

Løsning: Her er $h = \frac{1}{2}$.

$$\begin{aligned} h \left(\frac{f(a) + f(b)}{2} + \sum_{i=1}^{n-1} f(x_i) \right) &= \frac{1}{2} \left(\frac{0 + 4}{2} + \left(\frac{1}{2}\right)^2 + 1^2 + \left(\frac{3}{2}\right)^2 \right) \\ &= \frac{1}{2} \left(2 + \frac{1 + 4 + 9}{4} \right) = 1 + \frac{14}{8} = 1 + \frac{7}{4} = \frac{11}{4} \\ &= 2.75 \end{aligned}$$

eksakt svar her: $\int_0^2 x^2 dx = \frac{8}{3} \approx 2.6667$

midtpunkt ga 2.625, feil 0.0416

trapes ga 2.75, feil 0.0833

stemmer overens med at midtpunkt er litt bedre

Simpsons metode (k=2)

På hvert delintervall $[x_{2i-2}, x_{2i}]$ interpolerer vi i

$x_{2i-2}, x_{2i-1}, x_{2i}$. Sett $a = x_{2i-2}, m = x_{2i-1}, b = x_{2i}$.

Oppgave 10:

$$h = \frac{b-a}{2}$$

$$p_2(x) = c_0 + c_1(x-a) + c_2(x-a)(x-m)$$

$$f(a) = c_0$$

$$\Rightarrow c_0 = f(a)$$

$$f(m) = c_0 + c_1 h$$

$$\Rightarrow c_1 = \frac{f(m) - f(a)}{h}$$

$$f(b) = c_0 + c_1 2h + c_2 2h^2$$

$$c_2 = \frac{f(b) - f(a) - 2f(m) + 2f(a)}{2h^2}$$

$$= \frac{f(b) - 2f(m) + f(a)}{2h^2}$$

$$p_2(x) = f(a) + \frac{f(m) - f(a)}{h} (x-a) + \frac{f(b) - 2f(m) + f(a)}{2h^2} (x-a)(x-m)$$

$$\left[\frac{1}{2} (x-a)^2 \right]_a^b$$

$$= \frac{1}{2} 4h^2$$

$$= 2h^2$$

deross integrasjon:

$$\left[\frac{1}{2} (x-a)^2 (x-m) \right]_a^b - \int_a^b \frac{1}{2} (x-a)^2 dx$$

$$= \frac{1}{2} 4h^2 \cdot h - \frac{1}{6} \left[(x-a)^3 \right]_a^b$$

$$= 2h^3 - \frac{8}{6} h^3 = \frac{2}{3} h^3$$

$$\int_a^b p_2(x) dx = f(a)(b-a) + \frac{f(m) - f(a)}{h} 2h^2 + (f(b) - 2f(m) + f(a)) \frac{h}{3}$$

$$= 2f(a)h + (f(m) - f(a))2h + (f(b) - 2f(m) + f(a)) \frac{h}{3}$$

$$= \frac{h}{3} f(a) + \frac{h}{3} f(b) + (2h - \frac{2}{3}h) f(m) = \frac{h}{3} (f(a) + 4f(m) + f(b))$$

Eksempel Finn en tilnærming til $\int_0^2 x^2 dx$ med Simpsons metode, med ett delintervall.

Løsning: $\frac{h}{3} (f(0) + 4f(1) + f(2)) = \frac{1}{3} (0 + 4 + 4) = \frac{8}{3}$, som er det eksakte svaret!

Hvorfor: x^2 er det unike interpolerende polynomiet.

En annen forklaring: $\left| \int_a^b f(x) dx - \int_a^b p_2(x) dx \right| \leq \frac{M_3}{6} h^3 = 0$
hvor $M_3 = 0$, som er tilfelle for grad 2 polynom.

Eksempel Hva blir $\int_0^2 x^3 dx$ med Simpsons på ett delintervall?

$$\frac{h}{3} (f(a) + 4f(m) + f(b)) = \frac{1}{3} (0 + 4 + 8) = 4$$

Eksakt verdi: $\int_0^2 x^3 dx = \left[\frac{1}{4} x^4 \right]_0^2 = 4$

Det viser seg at Simpsons metode er eksakt for alle tredjegradspolynomer (se oppgave 8,9)

Simpsons metode på $\int_0^2 x^4 dx$, ett delintervall:

$$\int_0^2 x^4 dx = \left[\frac{1}{5} x^5 \right]_0^2 = \frac{32}{5} = 6.4$$

$$\frac{h}{3} (f(a) + 4f(m) + f(b)) = \frac{1}{3} (0 + 4 + 16) = \frac{20}{3} \approx 6.667.$$

Oppgave 4: $\int_0^1 \frac{dx}{1+2x}$

Hva må du velge h til for at feilen skal bli $\leq 10^{-10}$

$$\frac{(b-a)M_2}{2} h^2 = 4h^2 \leq 10^{-10} \Leftrightarrow h \leq \frac{1}{2} 10^{-5}$$

Feilen med

trapes:

$$\frac{(b-a)M_2}{24} h^2 = \frac{1}{3} h^2 \leq 10^{-10} \Leftrightarrow h \leq \sqrt{3} \cdot 10^{-5}$$

Simpson:

$$\frac{(b-a)M_3}{6} h^3 = 8h^3 \leq 10^{-10} \Leftrightarrow h \leq \frac{1}{2} 10^{-10/3}$$

$$\frac{10}{3} < 5$$

$$f(x) = \frac{1}{1+2x}$$

$$f'(x) = -\frac{2}{(1+2x)^2}$$

$$f''(x) = \frac{8}{(1+2x)^3} \quad M_2 = 8$$

$$f'''(x) = -\frac{48}{(1+2x)^4} \quad M_3 = 48$$

Oppgave 6

Vi vil finne w_1, w_2, w_3 s.a. $\int_a^b f(x) dx = w_1 f(a) + w_2 f(m) + w_3 f(b)$
for $f(x) = 1$, $f(x) = x$, $f(x) = x^2$.

$$f(x) = 1 : b - a = w_1 + w_2 + w_3$$

$$f(x) = x : \frac{1}{2}(b^2 - a^2) = w_1 a + w_2 m + w_3 b$$

$$f(x) = x^2 : \frac{1}{3}(b^3 - a^3) = w_1 a^2 + w_2 m^2 + w_3 b^2$$

Dette kan skrives

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & m & b \\ a^2 & m^2 & b^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b-a \\ \frac{1}{2}(b^2-a^2) \\ \frac{1}{3}(b^3-a^3) \end{pmatrix}$$

denne er invertierbar, så vi har unik løsning w_1, w_2, w_3 ,
og disse er gitt ved Simpsons metode. $\frac{h}{3} \quad \frac{4h}{3} \quad \frac{h}{3}$