

Kondisjonstall (kap. 5 : NA)

Vi skal løse $A\vec{x} = \vec{b}$ på datamaskin. Målingsfeil / avrundingsteil gir oss i stedet et system på formen

$$(A + E)\vec{x} = \vec{b} + \vec{e}$$

relativ feil mellom: $\left\{ \begin{array}{l} \text{"suro", avr. feil.} \\ \text{tall } a, b : \quad \left| \frac{b-a}{a} \right| \\ \text{vektorer } \vec{a}, \vec{b} : \quad \frac{|\vec{b}-\vec{a}|}{|\vec{a}|} \end{array} \right\}$ sier noe om hvor mange ledende sifre a og b har felles. (10^{-k})

absolutt feil: $\frac{|\vec{b}-\vec{a}|}{|\vec{b}-\vec{a}|}$ (upålitelig med tanke på skalering) $\left\{ \frac{cb-ca}{ca} \right\} = \left| \frac{b-a}{a} \right|$

Vi antar: Ingen avrundingsteil i matrisen ($E = 0$)

opprinnelig system $A\vec{x} = \vec{b}$

perturbert system $A\vec{y} = \vec{b} + \vec{e}$

1. Relativ feil i høyresiden: $\frac{|\cancel{c}\vec{b} + \vec{e}| - \cancel{c}|\vec{b}|}{|\vec{b}|} = \frac{|\vec{e}|}{|\vec{b}|}$

2. Relativ feil i løsningene: $\frac{|\vec{y} - \vec{x}|}{|\vec{x}|}$

Vil unngå: at feil i høyresiden 1. forsterkes til en stor feil i løsningene 2.

$\rightarrow \text{cond}(A)$ i matlab

Kondisjonstallet til A , $k(A)$, er definert som det minste tallet slik at

$$\frac{|\vec{y} - \vec{x}|}{|\vec{x}|} \leq k(A) \frac{|\vec{e}|}{|\vec{b}|} \quad (\text{alle } \vec{e}, \vec{b})$$

dos.: $k(A)$ sier hvor mye den relative feilen i høyresiden kan propagere til løsningene.

Eksempel Hvis $k(A) = 10^k$, og $\frac{|\vec{e}|}{|\vec{b}|} \leq 10^{-r}$ (dvs minst r riktige sifre i høyresiden)

$$\text{Da er } \frac{|\vec{y} - \vec{x}|}{|\vec{x}|} \leq k(A) \frac{|\vec{e}|}{|\vec{b}|} \leq 10^k 10^{-r} = 10^{k-r}$$

betyr at vi kan ha mestet k riktige sifre i løsningene.

Vil derfor unngå matriser med store kondisjonstall.

prop. 5.3 La A være symmetrisk, inverterbar, med egenverdier

$$|\lambda_1| \geq |\lambda_2| \geq \dots \geq |\lambda_n|$$

$$\text{Da er } k(A) = \left| \frac{\lambda_1}{\lambda_n} \right|$$

Bevis: Fra kap. 4.12 i FVLA: symmetriske matriser er ortogonalt diagonaliserbare, slik at vi kan skrive

$$A = P D P^T, \text{ der } P \text{ er ortogonal } (P^{-1} = P^T)$$

↑ egenverdiene på diagonalen $\vec{x}^T P D P^T$

Vi har:

$$|\vec{x}|^2 = \vec{x}^T \vec{x} \quad (P D P^T \vec{x})^T (P D P^T \vec{x})$$
$$|A\vec{x}|^2 = |P D P^T \vec{x}|^2 = \vec{x}^T P D^T P^T P D P^T \vec{x} = \vec{x}^T P D^2 P^T \vec{x}$$
$$= (P^T \vec{x})^T D^2 P^T \vec{x}$$

Sett $\vec{u} = P^T \vec{x}$. Vi kan da skrive som

$$|A\vec{x}|^2 = \vec{u}^T D^2 \vec{u} = \sum \lambda_i^2 u_i^2 \leq \lambda_1^2 \sum u_i^2 = \lambda_1^2 |\vec{u}|^2$$
$$\geq \lambda_n^2 \sum u_i^2 = \lambda_n^2 |\vec{u}|^2.$$

ta kvadratrøtter

$$|\lambda_n| |\vec{u}| \leq |A\vec{x}| \leq |\lambda_1| |\vec{u}|$$

$$\text{Vi har og at } |\vec{u}|^2 = \vec{u}^T \vec{u} = \vec{x}^T P P^T \vec{x} = \vec{x}^T \vec{x} = |\vec{x}|^2$$

Derfor er $|\vec{u}| = |\vec{x}|$, og vi har

$$|\lambda_n| |\vec{x}| \leq |A\vec{x}| \leq |\lambda_1| |\vec{x}|$$

$$\frac{1}{|\lambda_1|} |\vec{x}| \leq |A^{-1}\vec{x}| \leq \frac{1}{|\lambda_n|} |\vec{x}|$$

På samme måte,
egenverdier λ_i
oppgave 1

$$\left. \begin{array}{l} \text{Vi får: } A\vec{x} = \vec{b} \\ A\vec{y} = \vec{b} + \vec{e} \end{array} \right\} A(\vec{y} - \vec{x}) = \vec{e} \Leftrightarrow \vec{y} - \vec{x} = A^{-1}\vec{e}$$

Vi får så:

$$|\vec{y} - \vec{x}| = |A^{-1}\vec{e}| \stackrel{*1}{\leq} \frac{1}{|\lambda_n|} |\vec{e}|$$

$$|\vec{b}| = |A\vec{x}| \stackrel{*2}{\leq} |\lambda_1| |\vec{x}|$$

$$\text{Derfor: } \frac{|\vec{y} - \vec{x}|}{|\vec{x}|} \stackrel{*3}{\leq} \frac{\frac{1}{|\lambda_n|} |\vec{e}|}{\frac{|\lambda_1| |\vec{b}|}{|\lambda_1| |\vec{x}|}} = \left| \frac{\lambda_1}{\lambda_n} \right| \frac{|\vec{e}|}{|\vec{b}|}$$

$$\text{Derfor er } \kappa(A) \leq \frac{|\lambda_1|}{|\lambda_n|}.$$

For å vise at $\kappa(A) \geq \left| \frac{\lambda_1}{\lambda_n} \right|$: Oppgave 2:

Anta $\vec{e}$ egenvektor for A , $\lambda_n \Rightarrow$ likhet i $*1$

Anta $\vec{b}$ egenvektor for A , $\lambda_1 \Rightarrow$ likhet i $*2$

Så, med dette valget av $\vec{e}$, $\vec{b}$, så har vi likhet i $*3$, så.

$$\frac{|\vec{y} - \vec{x}|}{|\vec{x}|} = \left| \frac{\lambda_1}{\lambda_n} \right| \frac{|\vec{e}|}{|\vec{b}|} \Rightarrow \kappa(A) \geq \left| \frac{\lambda_1}{\lambda_n} \right|.$$

$$\text{Derfor er } \kappa(A) = \left| \frac{\lambda_1}{\lambda_n} \right|.$$

Oppgave 3

Her viser vi at $\frac{1}{k(A)} \frac{|\vec{e}|}{|\vec{b}|} \leq \frac{|\vec{y} - \vec{z}|}{|\vec{x}|}$,

med likhet når $\vec{e}$ egenvektor for T_1 , $\vec{b}$ egenvektor for T_n .

Hilbertmatrisen er $n \times n$, med elementer $\frac{1}{i+j-1}$, har store kondisjonstall.

Eksempel 5.4 2×2 matriser kan ha vilkårlig store kondisjonstall: La oss se på $A = \begin{pmatrix} 1 & 1-\varepsilon \\ 1-\varepsilon & 1 \end{pmatrix}$, $\varepsilon > 0$.
Hva er kondisjonstallet?

Løsning: Eigenverdiene:

$$\det(\lambda I - A) = (\lambda - 1)^2 - (1 - \varepsilon)^2 = 0$$

$$(\lambda - 1)^2 = (1 - \varepsilon)^2 \Rightarrow \lambda = 1 \pm (1 - \varepsilon)$$

$$\lambda_1 = 2 - \varepsilon$$

$$\lambda_2 = \varepsilon$$

$$k(A) = \left| \frac{2 - \varepsilon}{\varepsilon} \right| = \frac{2}{\varepsilon} - 1, \text{ som } \rightarrow \infty \text{ når } \varepsilon \rightarrow 0.$$

$$\text{Setter spesielt } \varepsilon = \frac{1}{4} \Rightarrow k(A) = \frac{2}{\frac{1}{4}} - 1 = 8 - 1 = 7.$$

Egenvektor for $\lambda_1 = 2 - \frac{1}{4} = \frac{7}{4}$

$$\frac{7}{4} I - A = \begin{pmatrix} \frac{3}{4} & -\frac{3}{4} \\ -\frac{3}{4} & \frac{3}{4} \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Egenvektor for $\lambda_2 = \frac{1}{4}$

$$\frac{1}{4} I - A = \begin{pmatrix} -\frac{3}{4} & -\frac{3}{4} \\ -\frac{3}{4} & -\frac{3}{4} \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \vec{v}_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\text{Set } \vec{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \quad \vec{b}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\vec{e}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \vec{b}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$\text{Für } \text{Lsg} \quad A\vec{x} = \vec{b}_1, \quad A\vec{y} = \vec{b}_1 + \vec{e}_1$$

$$A\vec{x} = \vec{b}_2, \quad A\vec{y} = \vec{b}_2 + \vec{e}_2$$

$$\begin{pmatrix} A & \vec{b}_1 & \vec{b}_1 + \vec{e}_1 & \vec{b}_2 & \vec{b}_2 + \vec{e}_2 \end{pmatrix} \\ = \begin{pmatrix} 1 & 3/4 & 1 & 2 & 1 & 2 \\ 3/4 & 1 & 1 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \sim \dots \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 4/7 & 32/7 & 4 & 32/7 \\ 0 & 1 & 4/7 & -24/7 & -4 & -24/7 \end{pmatrix}$$

$$1. \quad \vec{x} = \begin{pmatrix} 4/7 \\ 4/7 \end{pmatrix} \quad \text{Lsg} \quad A\vec{x} = \vec{b}_1$$

$$2. \quad \vec{x} = \begin{pmatrix} 4 \\ -4 \end{pmatrix} \quad \text{Lsg} \quad A\vec{x} = \vec{b}_2$$

$$\vec{y} = \begin{pmatrix} 32/7 \\ -24/7 \end{pmatrix} \quad \text{Lsg} \quad A\vec{y} = \vec{b}_1 + \vec{e}_1$$

$$\vec{y} = \begin{pmatrix} 32/7 \\ -24/7 \end{pmatrix} \quad \text{Lsg} \quad A\vec{y} = \vec{b}_2 + \vec{e}_2$$

$$\frac{|\vec{y} - \vec{x}|}{|\vec{x}|} \\ \downarrow \\ \underline{7}$$

$$K(A) \frac{|\vec{e}_1|}{|\vec{b}_1|} \\ \downarrow \frac{r_2}{r_2} \\ \underline{7}$$

$$\frac{1}{K(A)} \frac{|\vec{e}_1|}{|\vec{b}_1|} \\ \downarrow \\ \underline{\frac{1}{7}}$$

$$\frac{|\vec{y} - \vec{x}|}{|\vec{x}|} \\ \downarrow \\ \underline{\frac{1}{7}}$$