

Løsningsforslag til oblig 2

MAT1105, høst 2024

23. september 2024

Løsning på oppgave 4.4. Kun (f) uttrykker $\neg P$. Utsagnet $A \subseteq B$ betyr “for alle $x \in A$, er også $x \in B$ ”. Dette utsagnet er usant nettopp hvis det finnes minst én $x \in A$ som ikke ligger i B . Kun (f) uttrykker dette. $\square$

Løsning på oppgave 4.6. En sannhetstabell med kolonnene P , Q , R , $P \wedge Q$, $Q \vee R$, $(P \wedge Q) \vee R$ og $P \wedge (Q \vee R)$ ser slik ut:

P	Q	R	$P \wedge Q$	$Q \vee R$	$(P \wedge Q) \vee R$	$P \wedge (Q \vee R)$
U	U	U	U	U	U	U
U	S	U	U	S	U	U
S	U	U	U	U	U	U
S	S	U	S	S	S	S
U	U	S	U	S	S	U
U	S	S	U	S	S	U
S	U	S	U	S	S	S
S	S	S	S	S	S	S

Vi ser at de to siste kolonnene er ulike i rad 5 og 6. Altså er utsagnene $(P \wedge Q) \vee R$ og $P \wedge (Q \vee R)$ ikke ekvivalente. $\square$

Løsning på oppgave 4.8. La P stå for utsagnet $2x - 3 = 5$, og la Q stå for utsagnet $x = 4$. Vi må sjekke at dersom P er sann, er også Q sann, og motsatt. Anta derfor at P er sann. Da er $2x = 5 + 3 = 8$, og deler vi med 2 får vi $x = 4$, altså Q . Motsatt, om Q er sann, er $2x - 3 = 2 \cdot 4 - 3 = 5$, så P er også sann. Dermed er $P \Leftrightarrow Q$. $\square$

Løsning på oppgave 4.11. Vi bruker De Morgan i flere steg:

$$\begin{aligned}
 \neg((\neg P \vee Q) \wedge (\neg Q \vee R)) &\Leftrightarrow \neg(\neg P \vee Q) \vee \neg(\neg Q \vee R) \\
 &\Leftrightarrow (\neg(\neg P) \wedge \neg Q) \vee (\neg(\neg Q) \wedge \neg R) \\
 &\Leftrightarrow (P \wedge \neg Q) \vee (Q \wedge \neg R).
 \end{aligned}$$

Vi kan uttale dette som at “enten er P sann og Q usann, eller så er Q sann og R usann”. (Merk at begge utsagnene kan ikke være sanne samtidig, for da måtte Q vært både usann og sann.) $\square$

Løsning på oppgave 4.14.

$$(a) \quad \neg P_2 \Leftrightarrow \text{Det finnes en sau som ikke har hvit ull.}$$

(b) Vi begynner med å stykke opp utsagnet:

$$P_2 \Leftrightarrow \exists \text{ menneske } m, m \text{ liker ikke is til dessert.}$$

La oss så anta at alle mennesker enten liker is, eller ikke liker is, slik at

$$\neg(m \text{ liker ikke is til dessert}) \Leftrightarrow m \text{ liker is til dessert.}$$

Vi får da at

$$\neg P_2 \Leftrightarrow \forall \text{ mennesker } m, m \text{ liker is til dessert,}$$

eller sagt på en annen måte,

$$\neg P_2 \Leftrightarrow \text{alle mennesker liker is til dessert.}$$

(c) Vi tolker utsagnet slik: I løpet av enhver dag som har gått, var det minst én tidsperiode da det regnet i Bergen. Det motsatte av dette må være at det har vært minst én dag i historien da det ikke var minst én tidsperiode da det regnet i Bergen. Dette siste er det samme som at det ikke regnet overhodet i løpet av den dagen. Altså:

$$\neg P_3 \Leftrightarrow \text{det har vært minst én dag da det ikke regnet i Bergen.}$$

En annen tolkning ville vært "Til enhver tid regner det i Bergen". En tredje tolkning ville vært "Hvert eneste år regner det minst én gang hver dag".

(d) Vi tolker her "en romersk mynt" som "minst én romersk mynt". Negasjonen blir da

$$\neg P_4 \Leftrightarrow \text{minst én myntsamler har ingen romersk mynt i samlingen.}$$

Om vi tolket "en romersk mynt" som "én romersk mynt", ville negasjonen blitt

$$\neg P_4 \Leftrightarrow \text{minst én myntsamler har enten ingen, eller flere enn én, romersk mynt i samlingen.}$$

(e) La P være predikatet

$$P(s): s \text{ har blondt hår.}$$

La S være mengden bestående av alle svensker. Da sier P_5 at

$$P_5: (\exists s \in S, P(s)) \wedge (\exists s \in S, \neg P(s)).$$

Om vi bruker De Morgans første lov finner vi at det motsatte av P_5 er

$$\neg P_5 \Leftrightarrow \neg(\exists s \in S, P(s)) \vee \neg(\exists s \in S, \neg P(s)).$$

Vi bruker så regelen for å finne negasjonen av kvantorer og får

$$\neg P_5 \Leftrightarrow (\forall s \in S, \neg P(s)) \vee (\forall s \in S, P(s)).$$

Sagt med ord har vi da funnet at

$$\neg P_5 \Leftrightarrow \text{enten har ingen svensker blondt hår, eller så har alle det.}$$

□

Løsning på oppgave 4.15. Vi setter opp en sannhetstabell med kolonnene P , Q , $\neg P$, $\neg Q$, $P \Leftrightarrow Q$, $P \Rightarrow Q$, $\neg P \Rightarrow \neg Q$, $(P \Rightarrow Q) \wedge (\neg P \Rightarrow \neg Q)$ og $P \Leftrightarrow Q$:

P	$\neg P$	Q	$\neg Q$	$P \Rightarrow Q$	$\neg P \Rightarrow \neg Q$	$(P \Rightarrow Q) \wedge (\neg P \Rightarrow \neg Q)$	$P \Leftrightarrow Q$
U	S	U	S	S	S	S	S
U	S	S	U	S	U	U	U
S	U	U	S	U	S	U	U
S	U	S	U	S	S	S	S

Som vi ser av de to siste kolonnene, er utsagnene $P \Leftrightarrow Q$ og $(P \Rightarrow Q) \wedge (\neg P \Rightarrow \neg Q)$ ekvivalente. $\square$