

Løsningsforslag til oblig 3

MAT1105, høst 2024

3. oktober 2024

Løsning på oppgave 1.9.2. Matrisen til T er gitt ved

$$A = (T(\mathbf{e}_1) \quad T(\mathbf{e}_2)) = \underline{\underline{\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 2 & -2 \\ -3 & 4 \\ 4 & 7 \end{pmatrix}}}.$$

■

Løsning på oppgave 1.9.3. Siden T er lineær, er

$$T(3\mathbf{a} - 2\mathbf{b}) = 3T(\mathbf{a}) - 2T(\mathbf{b}) = 3 \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix} - 2 \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \end{pmatrix} = \underline{\underline{\begin{pmatrix} -6 \\ -3 \end{pmatrix}}}.$$

■

Løsning på oppgave 4.1.1. Vi radreduserer den utvidede matrisen til systemet:

$$\begin{aligned} & \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 3 \\ 2 & 3 & -3 & -1 \\ -1 & 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \leftarrow -2 \\ \leftarrow + \\ \leftarrow + \end{array} \begin{array}{l} 1 \\ \\ \end{array} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 3 \\ 0 & -1 & -1 & -7 \\ 0 & 4 & 2 & 4 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \\ \leftarrow 4 \\ \leftarrow + \end{array} \\ & \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 3 \\ 0 & -1 & -1 & -7 \\ 0 & 0 & -2 & -24 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \\ | \cdot -1 \\ | \cdot -1/2 \end{array} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 7 \\ 0 & 0 & 1 & 12 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \leftarrow + \\ \leftarrow + \\ \leftarrow -1 \end{array} \begin{array}{l} \\ \\ 1 \end{array} \\ & \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 15 \\ 0 & 1 & 0 & -5 \\ 0 & 0 & 1 & 12 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \leftarrow + \\ \leftarrow -2 \\ \end{array} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 25 \\ 0 & 1 & 0 & -5 \\ 0 & 0 & 1 & 12 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Altså er $x = 25, y = -5, z = 12$ den eneste løsningen til systemet.

■

Løsning på oppgave 4.2.3. Vi radreduserer den utvidede matrisen til systemet:

$$\begin{aligned}
 & \left(\begin{array}{cccc} 1 & -1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 1 \\ -2 & -1 & 1 & 0 \end{array} \right) \begin{array}{l} \leftarrow -2 \\ \leftarrow + \\ \leftarrow + \end{array} \sim \left(\begin{array}{cccc} 1 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & -3 & -1 \\ 0 & -3 & 5 & 2 \end{array} \right) \begin{array}{l} \leftarrow 1 \\ \leftarrow + \end{array} \\
 & \sim \left(\begin{array}{cccc} 1 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & -3 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \end{array} \right) \begin{array}{l} | \cdot 1/3 \\ | \cdot 1/2 \end{array} \sim \left(\begin{array}{cccc} 1 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & -1/3 \\ 0 & 0 & 1 & 1/2 \end{array} \right) \begin{array}{l} \leftarrow + \\ \leftarrow + \\ \leftarrow 1 \end{array} \sim \left(\begin{array}{cccc} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1/6 \\ 0 & 0 & 1 & 1/2 \end{array} \right) \begin{array}{l} \leftarrow + \\ \leftarrow 1 \end{array} \\
 & \sim \left(\begin{array}{cccc} 1 & 0 & 0 & 1/6 \\ 0 & 1 & 0 & 1/6 \\ 0 & 0 & 1 & 1/2 \end{array} \right) .
 \end{aligned}$$

Altså er $x = 1/6, y = 1/6, z = 1/2$ den eneste løsningen til systemet. ■

Løsning på oppgave 4.2.4. Vi radreduserer den utvidede matrisen til systemet:

$$\begin{aligned}
 & \left(\begin{array}{cccc} 3 & -4 & 1 & 2 \\ 1 & -2 & 0 & 1 \\ -2 & 2 & -1 & -1 \end{array} \right) \begin{array}{l} \leftarrow \\ \leftarrow \\ \leftarrow + \end{array} \sim \left(\begin{array}{cccc} 1 & -2 & 0 & 1 \\ 3 & -4 & 1 & 2 \\ -2 & 2 & -1 & -1 \end{array} \right) \begin{array}{l} \leftarrow -3 \\ \leftarrow + \\ \leftarrow + \end{array} \\
 & \sim \left(\begin{array}{cccc} 1 & -2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & -2 & -1 & 1 \end{array} \right) \begin{array}{l} \leftarrow 1 \\ \leftarrow + \end{array} \sim \left(\begin{array}{cccc} 1 & -2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \begin{array}{l} \leftarrow + \\ \leftarrow 1 \end{array} \\
 & \sim \left(\begin{array}{cccc} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) | \cdot 1/2 \sim \left(\begin{array}{cccc} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1/2 & -1/2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) .
 \end{aligned}$$

Her er tredje kolonne (den som tilhører variabelen z) ikke en pivotkolonne, så for enhver $z \in \mathbb{R}$ får vi en løsning med $x = -z$ og $y = -1/2 - z/2$. Dette er alle løsningene til systemet. ■

Løsning på oppgave 4.2.10. Vi tolker oppgaven slik: Ved starten av leieperioden (la oss si mandag) leies alle bilene ut fra by A, B og C – alle sammen samtidig – og ved slutten av leieperioden (la oss si fredag) returneres de nevnte andelene biler til byene A, B og C.

La x, y, z være antall biler i hhv. by A, B og C på mandag, og la x', y', z' være antall biler returnert til hhv. by A, B og C på fredag. Ifølge opplysningene er da

$$\begin{aligned}
 0.6x + 0.3y + 0.6z &= x' \\
 0.3x + 0.5y + 0.1z &= y' \\
 0.1x + 0.2y + 0.3z &= z' \\
 x + y + z &= 120.
 \end{aligned} \tag{1}$$

La oss gange de tre første ligningene med 10 for å slippe desimaltall:

$$\begin{aligned}
 6x + 3y + 6z &= 10x' \\
 3x + 5y + z &= 10y' \\
 x + 2y + 3z &= 10z' \\
 x + y + z &= 120.
 \end{aligned} \tag{2}$$

Vi ønsker at antall returnerte biler på fredag, x', y', z' , skal være lik antall biler på mandag, x, y, z . Vi setter derfor $x' = x$, $y' = y$ og $z' = z$ i (2). Etter å ha flyttet leddene x, y, z fra høyre over på venstre side, får vi systemet

$$\begin{aligned} -4x + 3y + 6z &= 0 \\ 3x - 5y + z &= 0 \\ x + 2y - 7z &= 0 \\ x + y + z &= 120. \end{aligned}$$

Vi skriver ned den utvidede matrisen og radreduserer:

$$\begin{aligned} &\begin{pmatrix} -4 & 3 & 6 & 0 \\ 3 & -5 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & -7 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 120 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \leftarrow \\ \leftarrow \\ \leftarrow \end{array} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & -7 & 0 \\ -4 & 3 & 6 & 0 \\ 3 & -5 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 120 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \leftarrow \begin{array}{l} 4 \\ + \end{array} \\ \leftarrow \begin{array}{l} -3 \\ + \end{array} \\ \leftarrow \begin{array}{l} + \end{array} \end{array} \begin{array}{l} -1 \\ + \\ + \end{array} \\ &\sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & -7 & 0 \\ 0 & -11 & 22 & 0 \\ 0 & 11 & -22 & 0 \\ 0 & -1 & 8 & 120 \end{pmatrix} \begin{array}{l} | \cdot -1/11 \\ | \cdot 1/11 \end{array} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & -7 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & -1 & 8 & 120 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \leftarrow \begin{array}{l} -1 \\ + \end{array} \\ \leftarrow \begin{array}{l} + \end{array} \end{array} \begin{array}{l} 1 \\ + \\ + \end{array} \\ &\sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & -7 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 6 & 120 \end{pmatrix} \begin{array}{l} | \cdot 1/6 \end{array} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & -7 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 20 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \leftarrow \begin{array}{l} + \end{array} \\ \leftarrow \begin{array}{l} + \end{array} \\ \leftarrow \begin{array}{l} -2 \\ -7 \end{array} \end{array} \begin{array}{l} + \\ + \\ -7 \end{array} \\ &\sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 140 \\ 0 & 1 & 0 & 40 \\ 0 & 0 & 1 & 20 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \leftarrow \begin{array}{l} + \\ -2 \end{array} \end{array} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 60 \\ 0 & 1 & 0 & 40 \\ 0 & 0 & 1 & 20 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Systemet har altså den unike løsningen $x = 60$, $y = 40$, $z = 20$. Det må med andre ord stå 60 biler i by A, 40 biler i by B, og 20 biler i by C. ■

Løsning på oppgave 4.3.6. Den utvidede matrisa til systemet er

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 & 3 & -4 \\ -1 & 2 & 4 & 3 & 2 \\ -2 & 1 & 3 & -4 & -1 \end{pmatrix}.$$

Vi radreduserer til redusert trappeform i Matlab:

```
>> A = [2 -1 1 3 -4;
-1 2 4 3 2;
-2 1 3 -4 -1];
>> rref(A)

ans =

    1.0000         0         0    3.5000    0.5000
         0    1.0000         0    3.7500    3.7500
         0         0    1.0000   -0.2500   -1.2500
```

Opp til avrundingsfeil ser det ut til at den reduserte trappeformen er

$$A \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 7/2 & 1/2 \\ 0 & 1 & 0 & 15/4 & 15/4 \\ 0 & 0 & 1 & -1/4 & -5/4 \end{pmatrix}.$$

Dermed får vi uendelig mange løsninger (x, y, z, u) , der $u \in \mathbb{R}$ kan velges vilkårlig og

$$\underline{\underline{x = \frac{1}{2} - \frac{7u}{2}, \quad y = \frac{15}{4} - \frac{15u}{4}, \quad z = -\frac{5}{4} + \frac{u}{4}.}}$$

■

Løsning på oppgave 4.4.4.

(a) Vi radreduserer matrisa:

$$\begin{aligned} A &= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 1 \\ 6 & 0 & -6 & 7 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \leftarrow \\ \leftarrow \end{array} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 6 & 0 & -6 & 7 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \leftarrow -6 \\ \leftarrow + \\ \leftarrow + \end{array} \begin{array}{l} -2 \\ \\ + \end{array} \\ &\sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & -2 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \\ \leftarrow -1 \\ \leftarrow + \end{array} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \leftarrow + \\ \\ \leftarrow 2 \\ \leftarrow + \end{array} \begin{array}{l} \\ \\ -1 \\ + \end{array} \\ &\sim \underline{\underline{\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}}}. \end{aligned}$$

(b) Vi radreduserer den utvidede matrisa til systemet $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ (merk at radoperasjonene er nøyaktig de samme som i (a)):

$$\begin{aligned} (A \quad \mathbf{b}) &= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 1 & 1 \\ 6 & 0 & -6 & 7 & h \\ 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \leftarrow \\ \leftarrow \end{array} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 0 \\ 6 & 0 & -6 & 7 & h \\ 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \leftarrow -6 \\ \leftarrow + \\ \leftarrow + \end{array} \begin{array}{l} -2 \\ \\ + \end{array} \\ &\sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & h-6 \\ 0 & 1 & 2 & -2 & -2 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \\ \leftarrow -1 \\ \leftarrow + \end{array} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & h-6 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & -2 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \leftarrow + \\ \\ \leftarrow 2 \\ \leftarrow + \end{array} \begin{array}{l} \\ \\ -1 \\ + \end{array} \\ &\sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 & 7-h \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & h-6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2h-14 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

For at det tilhørende systemet skal ha en løsning, kan ikke siste kolonne være en pivotkolonne. Altså må $2h - 14 = 0$, det vil si $h = 7$. Når $h = 7$ får vi

$$(A \quad \mathbf{b}) \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

som svarer til systemet

$$\begin{cases} x_1 - x_3 = 0 \\ x_2 + 2x_3 = 0 \\ x_4 = 1 \\ 0 = 0. \end{cases}$$

Om vi lar x_3 være den frie variabelen, finner vi at alle løsninger av systemet er på formen

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_3 \\ -2x_3 \\ x_3 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \text{der } x_3 \in \mathbb{R} \text{ er vilkårlig.}$$

(b), alternativ løsning: Vi ser av forrige oppgave at første, andre og fjerde kolonne i A er pivotkolonner. Løsningene til $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ vil dermed være på formen $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3, x_4)^T$, der $x_3 \in \mathbb{R}$ kan velges fritt, og x_1, x_2, x_4 må velges avhengig av x_3 . Vi får da

$$A\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_2 + 2x_3 \\ x_1 - x_3 + x_4 \\ 6x_1 - 6x_3 + 7x_4 \\ 2x_1 + x_2 \end{pmatrix} \stackrel{!}{=} \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ h \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Fra første komponent får vi $x_2 + 2x_3 = 0$, så $x_2 = -2x_3$. Fra fjerde komponent får vi $2x_1 + x_2 = 0$, så $x_1 = -\frac{1}{2}x_2 = x_3$. Og fra andre komponent får vi $x_1 - x_3 + x_4 = 1$, så $x_4 = 1 - x_1 + x_3 = 1 - x_3 + x_3 = 1$. Til slutt får vi fra tredje komponent

$$h = 6x_1 - 6x_3 + 7x_4 = 6x_1 - 6x_3 + 7x_4 = 7.$$

For at vi skal ha en løsning må derfor $h = 7$. Isåfall blir løsningene alle $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^4$ der $x_3 \in \mathbb{R}$ er vilkårlig og

$$\underline{x_1 = x_3, \quad x_2 = -2x_3, \quad x_4 = 1.}$$

■