

UNIVERSITETET I OSLO

Det matematisk-naturvitenskapelige fakultet

Deleksamen i MAT1105 — Lineær algebra og numeriske metoder

Eksamensdag: PRØVEEKSAMEN

Oppgavesettet er på 11 sider.

Vedlegg: Ingen

Tillatte hjelpemidler: Ingen

Kontroller at oppgavesettet er komplett før du begynner å besvare spørsmålene.

Oppgavesettet består av 19 flervalgsoppgaver, og hver av disse teller 1 poeng. Du skal ikke begrunne svarene. Kun ett av svaralternativene er riktig i hver oppgave. Dersom du velger feil svaralternativ, får du 0 poeng for oppgaven.

Oppgave 1

La $\mathbf{y} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$ og $\mathbf{z} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix}$. Løs ligningen $4\mathbf{y} - 2\mathbf{x} = 3\mathbf{z}$ for $\mathbf{x}$.

- a) Ligningen har ingen løsninger.
- b) Ligningen har uendelig mange løsninger.

c) $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} -8 \\ 6 \\ -10 \end{pmatrix}$

d) $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} -5 \\ 5/2 \\ -15/2 \end{pmatrix}$

e) $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 4/3 \\ -2 \\ 8/3 \end{pmatrix}$

Løsning: Alternativ d) er riktig. Vi kan bruke vanlig aritmetikk på vektorligninger og få

$$\begin{aligned} 4\mathbf{y} - 2\mathbf{x} = 3\mathbf{z} &\Leftrightarrow 2\mathbf{x} = 4\mathbf{y} - 3\mathbf{z} \\ &\Leftrightarrow \mathbf{x} = 2\mathbf{y} - \frac{3}{2}\mathbf{z} = 2 \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} - \frac{3}{2} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 \\ 5/2 \\ -15/2 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

□

(Fortsettes på side 2.)

Oppgave 2

La $\mathbf{a} = (4, 3, 2)$ og $\mathbf{b} = (-1, -4, -1)$. Da er projeksjonen av $\mathbf{a}$ ned på $\mathbf{b}$

- a) $(-1, -4, -1)$
- b) $(-2, -8, -2)$
- c) $(1, 4, 1)$
- d) $(2, 8, 2)$
- e) $(1, -1, 7)$

Løsning: Alternativ c) er riktig.

□

Oppgave 3

Vektorproduktet av de to vektorene $\mathbf{a} = (1, 0, 2)$ og $\mathbf{b} = (2, 2, 1)$ er

- a) $\mathbf{a} \times \mathbf{b} = (-4, 3, 2)$
- b) $\mathbf{a} \times \mathbf{b} = (2, 3, 4)$
- c) $\mathbf{a} \times \mathbf{b} = (-4, -3, -2)$
- d) $\mathbf{a} \times \mathbf{b} = (4, -3, -2)$
- e) $\mathbf{a} \times \mathbf{b} = (-4, -3, 2)$

Løsning: Alternativ a) er riktig.

□

Oppgave 4

La $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 0 & 2 & 4 \end{pmatrix}$ og $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$. Hva kan vi si om matrise-vektorproduktet $A\mathbf{x}$?

- a) Dette produktet er ikke definert.
- b) $A\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ 10 \end{pmatrix}$
- c) $A\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 16 \\ 0 \end{pmatrix}$
- d) $A\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix}$

(Fortsettes på side 3.)

e) $A\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}$

Løsning: Alternativ b) er riktig.

□

Oppgave 5

Vi har matrisene $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ og $B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & 0 \\ 2 & 7 & 4 \end{pmatrix}$. Da er

a) $AB = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 8 \\ 1 & 10 & 16 \\ 2 & 18 & 41 \end{pmatrix}$

b) $AB = \begin{pmatrix} 12 & 36 & 16 \\ 8 & 29 & 12 \\ 6 & 21 & 12 \end{pmatrix}$

c) $AB = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 8 & 0 \\ 0 & 0 & 12 \end{pmatrix}$

d) AB ikke definert

e) $AB = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 4 \\ 1 & 6 & 3 \\ 2 & 7 & 7 \end{pmatrix}$

Løsning: Alternativ b) er riktig.

□

Oppgave 6

La $A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}$. Forenkle uttrykket $(B^T A)^T (AB)^{-1}$.

a) I_n

b) $ABBA$

c) $A^T B B^T A^T$

d) A^2

e) $A^T A^{-1}$

Løsning: Alternativ e) er riktig. Vi har

$$(B^T A)^T (AB)^{-1} = (A^T (B^T)^T) (B^{-1} A^{-1}) = A^T B B^{-1} A^{-1} = A^T A^{-1}.$$

□

(Fortsettes på side 4.)

Oppgave 7

For hvilken verdi av a finnes det en løsning på følgende likningssystem?

$$\begin{aligned}2x + y + 3z &= 0 \\ x + 4z &= a \\ 5x + 2y + 10z &= 2\end{aligned}$$

- a) For alle a
- b) $a = 2$
- c) $a = 0$
- d) $a = 1$
- e) For alle $a \neq 1$.

Løsning: Alternativ **b)** er riktig. Vi har

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 4 & a \\ 5 & 2 & 10 & 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 & a \\ 0 & 1 & -5 & -2a \\ 0 & 2 & -10 & 2-5a \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 & a \\ 0 & 1 & -5 & -2a \\ 0 & 0 & 0 & 2-a \end{pmatrix}.$$

Siste søyle unngår å være en pivotsøyle kun for $a = 2$.

□

Oppgave 8

Hva er den reduserte trappeformen til følgende matrise?

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 6 \\ 2 & 1 & 4 \\ 1 & 2 & 5 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

- a) $A \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$
- b) $A \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$
- c) $A \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

(Fortsettes på side 5.)

$$\text{d)} \quad A \sim \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\text{e)} \quad A \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Løsning: Alternativ **a)** er riktig.

$$\begin{pmatrix} 2 & 2 & 6 \\ 2 & 1 & 4 \\ 1 & 2 & 5 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 0 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

□

Oppgave 9

Hva er pivotkolonnene til følgende matrise?

$$\begin{pmatrix} -2 & -6 & -3 & 2 \\ 1 & 3 & 2 & -1 \\ 2 & 6 & 4 & 0 \end{pmatrix}$$

a) kolonne 1, 2 og 3

b) kolonne 1 og 3

c) kolonne 1, 2 og 4

d) kolonne 1, 3 og 4

e) kolonne 1, 2, 3 og 4

Løsning: Alternativ **d)** er riktig. Vi har at

$$\begin{pmatrix} -2 & -6 & -3 & 2 \\ 1 & 3 & 2 & -1 \\ 2 & 6 & 4 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Det følger at søyle 1, 3, og 4 er pivotsøylar.

□

Oppgave 10

For hvilken høyreside $\mathbf{b}$ har systemet $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 2 & 1 & 3 \\ 2 & 7 & 13 \end{pmatrix} \mathbf{x} = \mathbf{b}$ én eller flere løsninger?

Hint: Radreduser $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 & b_1 \\ 2 & 1 & 3 & b_2 \\ 2 & 7 & 13 & b_3 \end{pmatrix}$. Hva må b_1, b_2, b_3 oppfylle for at systemet skal ha løsning?

(Fortsettes på side 6.)

a) $\mathbf{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

b) $\mathbf{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

c) $\mathbf{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

d) $\mathbf{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

e) $\mathbf{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$

Løsning: Alternativ e) er riktig.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 & b_1 \\ 2 & 1 & 3 & b_2 \\ 2 & 7 & 13 & b_3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 & b_1 \\ 0 & -3 & -5 & b_2 - 2b_1 \\ 0 & 3 & 5 & b_3 - 2b_1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 & b_1 \\ 0 & -3 & -5 & b_2 - 2b_1 \\ 0 & 0 & 0 & b_2 + b_3 - 4b_1 \end{pmatrix}.$$

Eneste måten å unngå at siste søyle er en pivotsøyle er at $b_2 + b_3 = 4b_1$. Det er bare e) som tilfredsstiller dette. Alternativt kan man sette inn alle fem søylene i svaralternativene i en utvidet matrise, og radredusere denne.

□

Oppgave 11

Hvilken påstand er sann?

- a) Det finnes systemer $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ som har nøyaktig to løsninger.
- b) Hvis A har et pivotelement i hver kolonne så har $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ alltid løsning(er).
- c) Trappeformen til en matrise er unik.
- d) $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ har alltid løsning(er) når A har flere kolonner enn rader.
- e) Hvis A har et pivotelement i hver rad så har $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ alltid løsning(er).

Løsning: Alternativ e) er riktig.

□

(Fortsettes på side 7.)

Oppgave 12

Hva kan vi si om løsningene til følgende ligningssystem?

$$2x_1 + x_2 = 1 - 3x_3$$

$$x_2 + 4x_3 = x_1 - 12$$

$$3x_1 + x_3 = 5.$$

- a) Systemet har ingen løsning.
- b) Systemet har uendelig mange løsninger.
- c) Systemet har én løsning, nemlig $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$.
- d) Systemet har én løsning, nemlig $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix}$.
- e) Systemet har én løsning, nemlig $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ 7 \\ -4 \end{pmatrix}$.

Løsning: Alternativ e) er riktig.

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 & 1 \\ -1 & 1 & 4 & -12 \\ 3 & 0 & 1 & 5 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & -4 & 12 \\ 0 & 3 & 11 & -23 \\ 0 & 3 & 13 & -31 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & -4 & 12 \\ 0 & 3 & 11 & -23 \\ 0 & 0 & 1 & -4 \end{pmatrix} \\ \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 7 \\ 0 & 0 & 1 & -4 \end{pmatrix}$$

□

Oppgave 13

La $T: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ være en lineær avbildning som er slik at

$$T(\mathbf{e}_1) = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad T(\mathbf{e}_2) = \begin{pmatrix} 3 \\ -3 \end{pmatrix}, \quad T(\mathbf{e}_3) = \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \end{pmatrix},$$

der $\mathbf{e}_k$ (for $k = 1, 2, 3$) er vektoren i $\mathbb{R}^3$ med k -te komponent lik 1, og med alle andre komponenter lik 0. Hva kan vi da si om T ?

- a) $T(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -3 \\ 0 & 5 \end{pmatrix} \mathbf{x}$ for alle $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3$.
- b) T er inverterbar, og $T^{-1}\left(\begin{pmatrix} 3 \\ -3 \end{pmatrix}\right) = \mathbf{e}_2$.
- c) $T(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 2 & -3 & 5 \end{pmatrix} \mathbf{x}$ for alle $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3$.

(Fortsettes på side 8.)

d) $T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$

e) $T(\mathbf{x}) \cdot T(\mathbf{y}) = T(\mathbf{x} \cdot \mathbf{y})$ for alle $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^3$.

Løsning: Alternativ **c)** er riktig. For å se at **c)** er riktig lar vi $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3$ og skriver $\mathbf{x} = x_1\mathbf{e}_1 + x_2\mathbf{e}_2 + x_3\mathbf{e}_3$, slik at

$$\begin{aligned} T(\mathbf{x}) &= T(x_1\mathbf{e}_1 + x_2\mathbf{e}_2 + x_3\mathbf{e}_3) = x_1T(\mathbf{e}_1) + x_2T(\mathbf{e}_2) + x_3T(\mathbf{e}_3) \\ &= x_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} 3 \\ -3 \end{pmatrix} + x_3 \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 2 & -3 & 5 \end{pmatrix} \mathbf{x} \end{aligned}$$

□

Oppgave 14

La $A \subseteq \mathbb{R}^2$ være mengden av alle punkter i trekanten som har hjørner i punktene $(1, 1)$, $(2, 1)$ og $(2, 2)$. Hvilket utsagn er sant?

- a) $A = \{(x, y) \in [1, 2] \times [1, 2] : x \geq y\}$
- b) $A = \{(x, y) \in [1, 1] \times [2, 1] \times [2, 2]\}$
- c) $A = \{(x, y) \in [1, 2] \times [1, 2] : x + y > 0\}$
- d) $A = \{(x, y) \in [1, 2] \times [2, 1]\}$
- e) $A = \{(x, y) \in [1, 2] \times [1, 2] : x \leq y + 3\}$

Løsning: Alternativ **a)** er riktig.

□

Oppgave 15

La $A = [0, 1]$ og definer $f: A \rightarrow A$ som $f(x) = 1 - x$ for $x \in A$. Hvilket utsagn er sant?

- a) f er ikke veldefinert.
- b) f er inverterbar, med inversfunksjon $f^{-1} = f$.
- c) f er inverterbar, med inversfunksjon $f^{-1}(y) = 1 + y$.
- d) f er injektiv, men ikke surjektiv.
- e) f er surjektiv, men ikke injektiv.

Løsning: Alternativ **b)** er riktig. Funksjonen er veldefinert, fordi $1 - x \in [0, 1]$ når $x \in [0, 1]$. Om vi setter $f(x) = y$ for en vilkårlig $y \in A$, får vi $1 - x = y$, det vil si $x = 1 - y$. Altså har ligningen $f(x) = y$ én og bare én løsning $x \in A$ for alle $y \in A$, så f er bijektiv, og dens inverse er $f^{-1}(y) = 1 - y$, som er samme funksjon som f .

□

(Fortsettes på side 9.)

Oppgave 16

Finn negasjonen av utsagnet

For alle primtall p finnes et primtall q slik at $q > p$.

- a) For alle primtall p finnes ingen primtall q slik at $q > p$.
- b) For alle primtall p og alle primtall q er $q \leq p$.
- c) Det finnes et primtall p og et primtall q slik at $q \leq p$.
- d) Det finnes et primtall p slik at $q \leq p$ for alle primtall q .
- e) Det finnes et primtall p slik at $p < q$ for alle primtall q .

Løsning: Alternativ **d)** er riktig. Vi kan skrive utsagnet som

$\forall$ primtall p , $\exists$ primtall q , $q > p$.

For å finne negasjonen bytter vi om alle $\forall$ med $\exists$, alle $\exists$ med $\forall$, og bytter om utsagnet ($q > p$ her) med sin negasjon:

$\exists$ primtall p , $\forall$ primtall q , $q \leq p$.

Dette er det samme som **d)**.

□

Oppgave 17

Omformuler følgende utsagn med kvantorer:

Det finnes et reelt tall a slik at $x + a = x$ for alle reelle tall x .

- a) $\exists a \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathbb{R}, x + a = x$.
- b) Setningen er ikke et utsagn, og kan derfor ikke skrives med kvantorer.
- c) $\forall x \in \mathbb{R}, \exists a \in \mathbb{R}, x + a = x$.
- d) $\exists a \in \mathbb{R} \Rightarrow x + a = x$
- e) $x + a = x \Rightarrow \exists x \in \mathbb{R}, \exists a \in \mathbb{R}$
- f) $\forall x \in \mathbb{R}, a \in \mathbb{R} \Rightarrow x + a = x$

Løsning: Alternativ a) er riktig.

□

Oppgave 18

La P og Q være utsagn, og anta at vi ønsker å bevise $P \Rightarrow Q$. Hvilken av de følgende er en gyldig framgangsmåte for å gjøre dette?

- a) Anta at både P og Q er sanne, og vis at det leder til en selvmotsigelse.
- b) Anta at både $\neg P$ og Q er sanne, og vis at det leder til en selvmotsigelse.
- c) Anta at P er sann, og vis at $\neg Q$ er sann.
- d) Anta at Q er usann, og vis at P er usann.
- e) Anta at Q er usann, og vis at P er sann.

Løsning: Alternativ d) er riktig. Utsagnet $P \Rightarrow Q$ er ekvivalent med $\neg Q \Rightarrow \neg P$. (Dette blir et kontrapositivt argument.)

□

(Fortsettes på side 11.)

Oppgave 19

Vi ser på følgende teorem med bevis.

Teorem. I enhver hesteflokk har alle hestene lik farge.

Bevis. La A være mengden av alle hester i flokken, og la $n = \#A$ være antall hester. Vi bruker induksjon på n . Hvis $n = 1$ er det bare én hest i flokken, så utsagnet er sant. Anta så at $n \in \mathbb{N}$ er slik at utsagnet er sant for alle hesteflokker med n hester. La A være en flokk med $n + 1$ hester, la B være mengden av de første n hestene, og la C være mengden av de siste n hestene. Da har alle hestene i B lik farge, og alle hestene i C lik farge. Siden B og C overlapper, må disse fargene være den samme fargen, og siden $A = B \cup C$, må alle hestene i A ha én og samme farge. $\square$

Hvilket utsagn er sant?

- a) Teoremet er sant, og beviset er korrekt.
- b) Teoremet er usant, men beviset er korrekt.
- c) Det er feil i beviset for at teoremet stemmer for $n = 1$.
- d) Det er feil i induksjonssteget, der man påstår at $A = B \cup C$.
- e) Det er feil i induksjonssteget, der man påstår at B og C overlapper.

Løsning: Alternativ e) er riktig. Når $n = 1$ og $\#A = n + 1 = 2$, og vi deler opp A i to forskjellige mengder B og C med 1 element hver, overlapper ikke B og C .

$\square$

SLUTT