

FORMELSAMLING FOR MAT 1105, oppdatert høsten 2025

Eksponentialfunksjoner

Derivasjon: $(a^x)' = a^x \ln a$ spesielt $(e^x)' = e^x$
Identiteter: $a^x a^y = a^{x+y}$ $\frac{a^x}{a^y} = a^{x-y}$ $a^{-x} = \frac{1}{a^x}$ $(a^x)^y = a^{xy}$

Logaritmefunksjonen

Derivasjon: $(\ln |x|)' = \frac{1}{x}$
Identiteter: $\ln(xy) = \ln x + \ln y$ $\ln(\frac{x}{y}) = \ln x - \ln y$ $\ln \frac{1}{x} = -\ln x$
 $\ln(x^a) = a \ln x$ for $x, y > 0$

Trigonometriske funksjoner

Derivasjon: $(\sin x)' = \cos x$ $(\cos x)' = -\sin x$
 $(\tan x)' = \frac{1}{\cos^2 x} = 1 + \tan^2 x$ $(\cot x)' = -\frac{1}{\sin^2 x}$
Identiteter: $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$
 $\sin(x+y) = \sin x \cos y + \cos x \sin y$
 $\cos(x+y) = \cos x \cos y - \sin x \sin y$
 $\sin 2x = 2 \sin x \cos x$
 $\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x = 2 \cos^2 x - 1 = 1 - 2 \sin^2 x$
 $\sin x = \pm \frac{\tan x}{\sqrt{1+\tan^2 x}}$
 $\cos x = \pm \frac{1}{\sqrt{1+\tan^2 x}}$

Eksakte verdier:

v	0	$\pi/6$	$\pi/4$	$\pi/3$	$\pi/2$
$\sin v$	0	1/2	$\sqrt{2}/2$	$\sqrt{3}/2$	1
$\cos v$	1	$\sqrt{3}/2$	$\sqrt{2}/2$	1/2	0
$\tan v$	0	$\sqrt{3}/3$	1	$\sqrt{3}$	—

Arcusfunksjoner

Derivasjon: $(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ $(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
 $(\arctan x)' = \frac{1}{1+x^2}$

Komplekse tall

Skrivemåter: $z = a + ib = r \cos \theta + ir \sin \theta = re^{i\theta}$
Eksponentialfunksjonen: $e^{a+ib} = e^a(\cos b + i \sin b)$
De Moivres formel: $(\cos \theta + i \sin \theta)^n = \cos(n\theta) + i \sin(n\theta)$

Lineær algebra

Vektorprodukt: $\mathbf{a} \times \mathbf{b} = (a_2b_3 - a_3b_2, a_3b_1 - a_1b_3, a_1b_2 - a_2b_1)$

Determinanter: $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc$

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = a_1 \begin{vmatrix} b_2 & b_3 \\ c_2 & c_3 \end{vmatrix} - a_2 \begin{vmatrix} b_1 & b_3 \\ c_1 & c_3 \end{vmatrix} + a_3 \begin{vmatrix} b_1 & b_2 \\ c_1 & c_2 \end{vmatrix}$$

Projeksjon: $\text{proj}_{\mathbf{b}}(\mathbf{a}) = \frac{\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}}{|\mathbf{b}|^2} \mathbf{b}$

Volum av parallelepiped: $V = |\mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} \times \mathbf{c})| = |\det(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c})|$

Avstand fra punkt til plan: $\frac{|ax_0 + by_0 + cz_0 - d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$

Invers av en 2×2 -matrise: $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{ad-bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$

Løsningen av $\mathbf{x}'(t) = A\mathbf{x}(t)$ når A er 2×2 , reell, og diagonaliserbar:

$$\mathbf{x}(t) = \begin{cases} C_1 e^{\lambda_1 t} \mathbf{p}_1 + C_2 e^{\lambda_2 t} \mathbf{p}_2 & \text{når } A \text{ har reelle egenverdier.} \\ 2\Re(Ce^{\lambda t} \mathbf{p}) & \text{når } A \text{ har komplekse egenverdier.} \end{cases}$$

$\mathbf{p}$ er her en egenvektor tilhørende λ og C er en konstant.

Taylorpolynomet med restledd

$$\begin{aligned} f(x) &= \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (x-a)^k + \frac{1}{n!} \int_a^x f^{(n+1)}(t) (x-t)^n dt \\ &= \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (x-a)^k + \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!} (x-a)^{n+1} \end{aligned}$$

Numeriske formler

Newtonformen for det interpolerende polynomet:

$$\begin{aligned} p_n(x) &= c_0 + c_1(x-x_0) + c_2(x-x_0)(x-x_1) + \dots \\ &\quad + c_n(x-x_0)(x-x_1)\dots(x-x_{n-1}). \end{aligned}$$

Trapesmetoden:

$$\int_a^b f(x) dx \approx h \left(\frac{f(a)+f(b)}{2} + \sum_{i=1}^{n-1} f(x_i) \right), \text{ der } h = (b-a)/n.$$

Simpsons metode:

$$\int_a^b f(x) dx \approx \frac{h}{3} \left(f(a) + f(b) + 2 \sum_{i=1}^{n-1} f(x_{2i}) + 4 \sum_{i=1}^n f(x_{2i-1}) \right),$$

der $h = (b-a)/(2n)$.