

Lynkurs i matematikkens grunnlag

Ulrik Skre Fjordholm

18. juni 2025

Takk

Tusen takk til Tom L. Lindstrøm, Inger Christin Borge og Ola H. Mæhlen for veldig god tilbakemelding på en tidlig versjon av dette notatet.

Lisens

Dette verket er lisensiert under [Creative Commons BY-NC-SA versjon 4.0](#).

LES DETTE FØRST!

I hvert kapittel finner du flere oppgaver spredt rundt om i teksten.

Oppgave. Hver gang du ser en slik oppgave i teksten, må du stoppe opp og prøve å løse den!

Du vil finne løsninger på flere av oppgavene i Tillegg C bakerst i dette notatet. Om du står fast på en oppgave, ta en rask kikk på løsningsforslaget, og forsøk å løse oppgaven på nytt.

Matematisk tekst er ikke noe man bare *leser*, det er noe man må *jobbe seg gjennom*; det er bare ved å trene på stoffet at du faktisk vil forstå det. Så finn fram penn og papir og sett i gang!

INNHold

1	Hva er matematikk?	4
1.1	Definisjon, teorem og bevis	4
1.2	Matematisk notasjon	4
2	Mengder	7
2.1	Mengder, og hvordan vi bygger dem	7
2.2	Delmengder	9
2.3	Kardinalitet	10
2.4	Operasjoner på mengder	11
2.5	Tupler og kartesisk produkt	13
2.6	Flere oppgaver	14
3	Funksjoner	15
3.1	Hva er en funksjon?	15
3.2	Funksjonsegenskaper	17
3.3	Operasjoner med funksjoner	17
3.4	Inversfunksjoner	18
3.5	Flere oppgaver	19
4	Utsagnslogikk	20
4.1	Utsagn og predikater	20
4.2	Konnektiver	21
4.3	De Morgans lover	24
4.4	Kvantorer	24
4.5	Oppsummering	27
4.6	Flere oppgaver	28
5	Bevisteknikk	30
5.1	En generell fremgangsmåte	30
5.2	Direkte bevis	32
5.3	Kontrapositivt bevis	35
5.4	Motsigelsesbevis	36
5.5	Induksjonsbevis	38
5.6	Oppsummering	40
5.7	Flere oppgaver	41
A	Mer om kardinalitet	42
B	Hva er “egentlig” en funksjon?	45
C	Løsning på enkelte oppgaver	46

1 HVA ER MATEMATIKK?

1.1 Definisjon, teorem og bevis

Om du skal forklare hva matematikk er i én setning, må det bli noe slikt:

Matematisk tekst består av *definisjoner* som introduserer nye begreper, *teoremer* som forteller oss noe nytt om disse begrepene, og *beviser* som forklarer hvorfor teoremene er sanne.

En definisjon kan se slik ut:

Definisjon. Et tall x er et *partall* hvis det finnes et heltall n slik at $x = 2n$.

Definisjonen introduserer et nytt begrep (“partall”), og gir oss en klar og utvetydig forklaring på hva vi mener med det begrepet. Vi kan så komme med en *påstand* om dette nye begrepet, slik:

Teorem. *Tallet 18 er et partall.*

Bevis. Vi kan skrive $18 = 2 \cdot 9$. Siden 9 er et heltall, må dermed 18 være et partall. ■

Teoremer kalles også ofte *setninger* eller *resultater*. Alle teoremer er påstander — setninger som sier at noe er sant — men ikke alle påstander er teoremer. En påstand kan kalles et teorem først når det finnes et bevis for påstanden. Beviset skal være et bombesikkert logisk argument for at påstanden er sann. Som oftest skriver vi beviset rett etter teoremet, slik som over. En påstand vi tror er sann, men som vi ikke har et bevis for, kaller vi en *formodning* (*hypothesis* eller *conjecture* på engelsk).

Det finnes flere typer teoremer:

Proposisjon: Et lite teorem, i den forstand at det er enkelt eller raskt å bevise, eller at det ikke har så store konsekvenser.

Lemma: Et teorem som har som hovedformål å brukes i beviset for et større teorem.

Korollar: Et teorem som er en (mer eller mindre) direkte konsekvens av et annet teorem.

I dette notatet vil du lære om de mest grunnleggende bestanddelene i matematikken, nemlig mengder (kapittel 2) og funksjoner (kapittel 3). Du får så en innføring i utsagnslogikk (kapittel 4), som er et formelt rammeverk for å formulere presise utsagn, før vi tar for oss noen forskjellige bevistechnikker (kapittel 5).

1.2 Matematisk notasjon

Når vi skriver matematikk er det ikke bare viktig *hva* vi skriver, men også *hvordan* vi skriver det. Matematikere verden rundt er (stort sett) enige om et sett med regler for *matematisk notasjon* – hvordan matematiske ideer skal uttrykkes skriftlig. Du kommer til å lære mye notasjon underveis, men vi tar her med noen viktige punkter.

I dette beviset bruker vi symbolet ■ for å signalisere at vi er ferdig med å bevise påstanden. Dette kalles ofte QED-symbolet, etter det latinske uttrykket *quod erat demonstrandum* — “som var det som skulle bevises”.

1.2.1 Lange beregninger

Ofte vil du måtte gjøre beregninger med mange steg som strekker seg over flere linjer. Her er et eksempel på hvordan det skal gjøres:

$$\begin{aligned}(a + b)^3 &= (a + b)(a + b)^2 = (a + b)(a^2 + 2ab + b^2) \\ &= a(a^2 + 2ab + b^2) + b(a^2 + 2ab + b^2) \\ &= a^3 + 2a^2b + ab^2 + ba^2 + 2ab^2 + b^3 \\ &= a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3.\end{aligned}$$

Merk at

- vi gjentar *ikke* venstresiden (uttrykket $(a + b)^3$) for hver nye linje
- en linje kan godt inneholde flere likhetstegn (flere steg i utregningen)
- likhetstegnet skal stå som første symbol på neste linje, og *aldri som siste symbol på en linje*.

1.2.2 Definisjoner

Som nevnt i forrige seksjon, er definisjoner helt sentrale i matematikken. Vi kommer ikke bare til å definere nye begreper, men også nye variabler — vi introduserer et nytt symbol med en bestemt verdi. Dette gjør vi med symbolet $:=$. Om vi for eksempel vil si at $\sqrt{2}$ løser ligningen $x^2 - 2 = 0$, kan vi skrive

$$\text{La } x := \sqrt{2}. \text{ Da er } x^2 - 2 = 0.$$

Dette kan vi lese som “La x være definert som kvadratroten av 2. Da er $x^2 - 2 = 0$ ”.

Uttrykkene $x := \sqrt{2}$ og $x = \sqrt{2}$ er beslektet, men de uttrykker to forskjellige ting. Uttrykket $x := \sqrt{2}$ sier “fra nå av skal du se på symbolet x som en forkortelse for $\sqrt{2}$ ”. På den annen side sier uttrykket $x = \sqrt{2}$ at “jeg påstår at x har verdien $\sqrt{2}$ ”. Dette kan være sant eller usant, avhengig av hvordan vi har definert x tidligere i teksten. (Uttrykket $x = 2$ er et eksempel på et *utsagn*, som vi skal se på i Seksjon 4.1.)

← $:=$

Andre symboler for definisjoner er $\equiv$, $\triangleq$ og $=_{\text{def}}$. Jeg vil anbefale å ikke bruke $\equiv$, siden dette symbolet brukes for mange andre ting, slik som modulær aritmetikk.

1.2.3 Det greske alfabetet

Du kommer til å møte på mange av de greske bokstavene i løpet av studiet. Derfor er det like greit å pugge dem, først som sist. Det er nok λ , ε og δ du kommer til å møte på først, og deretter gradvis de andre små bokstavene.

Stor bokstav	Liten bokstav	Norsk skrivemåte	Kommentar
A	α	alfa	
B	β	beta	
Γ	γ	gamma	
Δ	δ	delta	
E	ε	epsilon	Skrives noen ganger ϵ
Z	ζ	zeta	
H	η	eta	
Θ	θ	theta	Uttales <i>te-ta</i>
I	ι	iota	Uttales <i>jåtta</i>
K	κ	kappa	
Λ	λ	lambda	Uttales <i>lamda</i>
M	μ	my	
N	ν	ny	
Ξ	ξ	ksi	
O	o	omikron	Brukes sjelden i matematikk
Π	π	pi	
P	ρ	rho	Uttales <i>ro</i>
Σ	σ	sigma	
T	τ	tau	
Y	υ	ypsilon	Brukes sjelden i matematikk
Φ	φ	phi	Uttales <i>fi</i> . Skrives noen ganger ϕ .
X	χ	khi	Uttales <i>kji</i>
Ψ	ψ	psi	
Ω	ω	omega	

2 MENGDER

2.1 Mengder, og hvordan vi bygger dem

En *mengde* er en samling av matematiske objekter, for eksempel tall, vektorer, eller funksjoner. Vi kan definere mengder som en liste: Når vi skriver

← *mengde*

$$A = \{2, 8, 4\}$$

mener vi at A er en mengde som inneholder de tre tallene 2, 8 og 4, og ingenting annet. Vi sier at disse tre tallene *ligger i* A eller *er elementer av* A . For å uttrykke at for eksempel 2 ligger i A skriver vi $2 \in A$ (uttales “2 ligger i A ”), og for å uttrykke at for eksempel 3 *ikke* ligger i A skriver vi $3 \notin A$ (uttales “3 ligger ikke i A ”).

← $\in, \notin$

Symbolet $\in$ er en stilisert versjon av den greske bokstaven ϵ . Pass på at disse symbolene ikke ligner for mye når du skriver dem for hånd.



FIGUR 2.1: Mengden $A = \{2, 8, 4\}$.

Om A er en mengde og x er et objekt, vil enten x ligge i A , eller ikke ligge i A — det er ingen mellomting. Med dette i bakhodet er følgende to egenskaper ganske naturlige:

- En mengde har ingen innebygd rekkefølge, så $\{2, 8, 4\}$ og $\{4, 2, 8\}$ er bare to forskjellige måter å skrive samme mengde på.
- En mengde kan ikke inneholde flere av samme objekt, så mengdene $\{1, 2, 2, 4\}$ og $\{1, 2, 4\}$ er én og samme mengde.

(I oppgave 2.5 skal du bevise disse egenskapene for en bestemt mengde, men du bør stoppe opp her og tenke over hvorfor disse egenskapene er naturlige.)

En helt spesiell mengde er *den tomme mengden*

← *den tomme mengden*

$$\emptyset = \{\}$$

(uttales “den tomme mengden”, og ikke “Ø”, som den norske/danske bokstaven), altså mengden som ikke inneholder noe som helst.

Det er ikke alltid mulig å liste opp alle elementene i en mengde. Hvis vi for eksempel skal definere mengden $\mathbb{N}$ av alle *naturlige tall*, kan vi skrive

← *naturlige tall*

$$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\},$$

som vi kan uttale som “ $\mathbb{N}$ er mengden av tallene 1, 2, 3, og så videre”. To andre viktige mengder er

Det er ikke enighet blant matematikere om hvorvidt 0 er et naturlig tall eller ikke. Her kommer vi til å bruke notasjonen $\mathbb{N}_0$ for de naturlige tallene *inkludert* 0 .

$$\mathbb{N}_0 = \{0, 1, 2, 3, \dots\} \quad \text{og} \quad \mathbb{Z} = \{\dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots\},$$

altså mengden av alle ikke-negative heltall, og mengden av alle heltall. Vi kan også være mer uformelle, slik som i definisjonen

$$\mathbb{R} = \{\text{alle reelle tall}\}$$

av mengden av de reelle tallene, eller tallinja. Dette er en OK definisjon av mengden av de reelle tallene, men det er ikke opplagt hva et reelt tall er. Vi skal ikke her gå inn på konstruksjonen av de reelle tallene, annet enn å bemerke at det overhodet ikke er opplagt.

Det er ofte tungvint, eller umulig, å betegne mengder ved hjelp av lister slik som i eksemplene over. I stedet kan vi beskrive elementene i mengden ut fra hvilken egenskap de har, ved hjelp av mengdebyggenotasjon. Når vi skriver

$$\{(\text{uttrykk}) : (\text{betingelse})\},$$

mener vi mengden av alle uttrykk som oppfyller en bestemt betingelse. Symbolet $:$ betyr her “nå kommer det en betingelse”, og leses gjerne “slik at” eller “som oppfyller”. For eksempel kan vi definere mengden av de rasjonale tallene som

$$\mathbb{Q} = \{p/q : p, q \in \mathbb{Z}, q \neq 0\}.$$

Dette leser vi som “ $\mathbb{Q}$ er mengden av alle uttrykk på formen p delt på q , der p og q er heltall og q er ulik 0”.

Dersom A er en gitt mengde, skriver vi også

$$\{x \in A : (\text{betingelse})\}$$

for mengden av alle de objektene x i A som oppfyller betingelsen. Ta for eksempel mengden av alle positive* reelle tall

$$\mathbb{R}_+ = \{x \in \mathbb{R} : x > 0\},$$

som vi kan uttale som “ $\mathbb{R}_+$ er mengden av alle reelle tall som er positive”, eventuelt “ $\mathbb{R}_+$ er mengden av alle x i $\mathbb{R}$ slik at x er større enn 0”.

Vi tar til slutt med definisjonen av intervallene. Hvis $a, b \in \mathbb{R}$ er reelle tall, skriver vi

$$[a, b] = \{x \in \mathbb{R} : x \geq a \text{ og } x \leq b\}$$

(et lukket intervall) og

$$(a, b) = \{x \in \mathbb{R} : x > a \text{ og } x < b\}$$

(et åpent intervall). På samme måte definerer vi

$$(a, b] = \{x \in \mathbb{R} : x > a \text{ og } x \leq b\},$$

og tilsvarende for $[a, b)$. Vi bruker også notasjonen

$$(a, \infty) = \{x \in \mathbb{R} : x > a\},$$

og tilsvarende for $[a, \infty)$, $(-\infty, b)$ og $(-\infty, b]$.

Bemerkning 2.1. I noen tekster vil du finne notasjonen $(a, \rightarrow)$ istedenfor (a, ∞) , og notasjonene $\langle a, b \rangle$ eller $]a, b[$ istedenfor (a, b) . Notasjonen vi bruker her er desidert vanligst. $\square$

← reelle tall

← tallinja

← mengdebyggenotasjon

Du vil også møte på notasjonen $\{(\text{uttrykk}) \mid (\text{betingelse})\}$, altså med symbolet $\mid$ istedenfor $:$. Dette betyr akkurat det samme.

← rasjonale tall

* Positiv betyr større enn 0, og negativ betyr mindre enn 0. Tallet 0 er hverken positivt eller negativt.

← intervall

← lukket intervall

← åpent intervall

Oppgave 2.1. Hva er (a, b) når $b < a$?

Hint: Bruk definisjonen av (a, b) .

Oppgave 2.2. Definer mengden P bestående av alle positive partall, både som en liste og ved hjelp av mengdebyggenotasjon.

Bemerkning 2.2. Bokstaven $\mathbb{N}$ kommer, naturlig nok, fra det latinske *numeri naturales* “naturlige tall”. Mengden $\mathbb{Z}$ tar navnet sitt fra tysk *Zahl* “tall”, mens $\mathbb{Q}$ kommer fra tysk *Quotient*, og $\mathbb{R}$ fra *reell*. Du bør pugge definisjonen av mengdene $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$ og $\mathbb{R}$. $\square$

2.2 Delmengder

To mengder er *like* hvis de inneholder nøyaktig de samme objektene; hvis ikke er de *ulike*. Hvis for eksempel

$$A = \{2, 8, 4\}, \quad B = \{8, 2, 4\} \quad \text{og} \quad C = \{4, 8, 5\}$$

så er $A = B$ (uttales “ A og B er like”), men $A \neq C$ (uttales “ A og C er ulike”). Merk her at det ikke har noe å si at vi har skrevet elementene i B i en annen rekkefølge enn i A — det som har noe å si er hvorvidt du finner de samme objektene i A som i B .

Hvis A og B er to mengder skriver vi

$$A \subseteq B$$

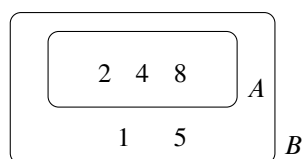
(uttales “ A er en *delmengde* av B ”) dersom alle objektene i A også ligger i B . Mer presist: $A \subseteq B$ betyr at $x \in B$ for alle $x \in A$. Noen ganger skriver vi

← *delmengde*

$$B \supseteq A,$$

som betyr nøyaktig det samme som $A \subseteq B$. Hvis vi i tillegg vil uttrykke at A og B er forskjellige mengder, skriver vi $A \subsetneq B$ (uttales “ A er en *ekte delmengde* av B ”). Dette betyr altså at $x \in B$ for alle $x \in A$, og at det finnes minst én $x \in B$ slik at $x \notin A$.

← *ekte delmengde*



FIGUR 2.2: Mengden $A = \{2, 4, 8\}$ er en ekte delmengde av $B = \{1, 2, 4, 5, 8\}$.

Bemerkning 2.3. Symbolet $\subsetneq$ for å betegne en ekte delmengde kan også skrives $\subsetneq$. Noen bruker symbolet $\subset$ synonymt med $\subseteq$, mens andre bruker den synonymt med $\subsetneq$. Det kan derfor være lurt å holde seg unna $\subset$ og kun bruke symbolene $\subseteq$ og $\subsetneq$ (alternativt $\subsetneq$), for å unngå misforståelser. $\square$

Oppgave 2.3. La $A = \{x \in \mathbb{R} : x > 4\}$ og $B = \{x \in \mathbb{R} : x \geq 0\}$. Bevis at $A \subseteq B$. Vær så presis som du klarer.

Når vi ønsker å undersøke om to mengder A og B er like, må vi gjennom to steg:

- vis at $A \subseteq B$ (altså at alle elementer i A også ligger i B)
- vis at $B \subseteq A$ (altså at alle elementer i B også ligger i A).

Oppgave 2.4. Forklar utsagnet ovenfor, altså at $A = B$ betyr det samme som at både $A \subseteq B$ og $B \subseteq A$.

Oppgave 2.5. La A og B være mengdene

$$A = \{1, 2, 3\}, \quad B = \{3, 1, 1, 2\}.$$

Bruk fremgangsmåten ovenfor for å vise at $A = B$.

Alle eksemplene på mengder så langt består utelukkende av tall, men en mengde kan inneholde et hvilket som helst objekt — til og med en annen mengde! For eksempel er

$$A = \{4, \sin, \pi, \{1, 2\}, \emptyset\}$$

mengden som inneholder tallet 4, sinusfunksjonen, tallet π , mengden $\{1, 2\}$, og den tomme mengde. Men de aller fleste mengder du kommer til å støte på inneholder objekter av samme type. Etterhvert kommer du for eksempel til å jobbe mye med mengder bestående av funksjoner. Og om du senere studerer sannsynlighetsteori blir du kjent med σ -algebraer, som er mengder bestående utelukkende av delmengder av en gitt mengde!

For å slippe å snakke om “en mengde av mengder” sier vi ofte istedet “en familie av mengder”.

Oppgave 2.6. Hvis $A = \{1, 2\}$ og $B = \{1, 2, \{1, 2\}\}$, hvilke av følgende påstander er sanne?

- (a) $A \subseteq B$
- (b) $A \in B$
- (c) $B \subseteq A$
- (d) $B \in A$

2.3 Kardinalitet

Mengden $A = \{2, 8, 4\}$ er en *endelig* mengde — den inneholder et endelig antall objekter. En mengdes *kardinalitet* betegnes med symbolet $\#$, og er nettopp antallet elementer i mengden. For eksempel er $\#A = 3$. Hvis en mengde ikke er endelig, er den *uendelig*, eller *uendelig stor*. Det er mulig å gi mening til kardinaliteten til uendelig store mengder slik som $\mathbb{N}$, men det havner utenfor pensum. Se Tillegg A på side 42 om du vil lære mer.

← kardinalitet

Noen steder vil man finne notasjonen $|A|$ for kardinaliteten til A .

Oppgave 2.7. Finn kardinaliteten til følgende mengder.

- (a) $A = \emptyset$
- (b) $B = \{8, 10, 3, 5\}$
- (c) $C = \{2, 5, 2, 9, 5\}^*$
- (d) $D = \{x \in \mathbb{N} : x \leq 20 \text{ og } x \text{ er et partall}\}$
- (e) $E = \{x \in \mathbb{Z} : x < 0\}$

* Hint: Kan en mengde inneholde et objekt flere ganger?

Oppgave 2.8. La a, b, c, d være fire tall, og la $A = \{a, b, c, d\}$. Hva kan vi si om $\#A$?

2.4 Operasjoner på mengder

Hvis A og B er mengder definerer vi *unionen* av A og B som

$$A \cup B = \{x : x \in A \text{ eller } x \in B\}$$

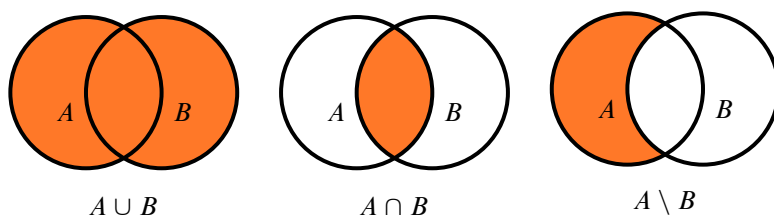
(uttales “ A union B ”), altså alle de objektene som enten ligger i A , eller i B (eller i begge). *Snittet* mellom A og B er mengden

$$A \cap B = \{x : x \in A \text{ og } x \in B\}$$

(uttales “ A snitt B ”), altså alle de objektene som *både* ligger i A og i B . Vi definerer også *mengdedifferansen* mellom A og B som

$$A \setminus B = \{x \in A : x \notin B\},$$

altså alle objektene i A som *ikke* ligger i B .



FIGUR 2.3: De tre mengdene $A \cup B$, $A \cap B$ og $A \setminus B$.

Oppgave 2.9. Finn $A \cup B$, $A \cap B$ og $A \setminus B$ når $A = \{x \in \mathbb{R} : x > 4\}$ og $B = \{x \in \mathbb{R} : x < 9\}$.

← union

← snitt

← mengdedifferanse

Vi uttaler noen ganger $A \setminus B$ som “ A minus B ”. Men vær forsiktig — her mener vi “minus” i forstanden “ta vekk elementer”, ikke i forstanden “subtrahere”!

Oppgave 2.10. Hvis A og B er mengder, forklar hvorfor følgende påstander er sanne:

(a) $A \cap B = B \cap A$

(b) $A \cup B = B \cup A$

(c) $A \cap B \subseteq A$

(d) $A \setminus B \subseteq A$

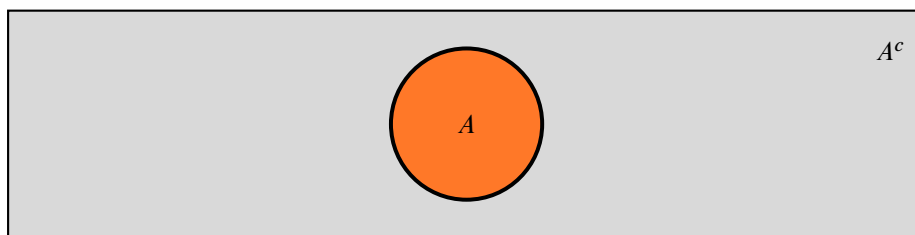
(e) $A \subseteq A \cup B$

Vi har ofte behov for å snakke om de objektene som *ikke* ligger i en mengde. For en mengde A definerer vi *komplementet* til A som mengden

← komplement

$$A^c = \{x : x \notin A\}$$

(uttales “ A komplement”), altså alle objekter som *ikke* ligger i A , eller alle objekter som ligger *utenfor* A . Men hva mener vi egentlig med “alle objekter”? Hvis $A = \{1, 2, 3\}$, så ligger jo hverken de negative tallene, eller sinusfunksjonen, eller min gamle bestemor, i mengden A . Betyr det da at A^c skal inneholde alle disse?



FIGUR 2.4: En mengde A og dens komplement A^c .

For at komplementet skal være et nyttig begrep, må det være tydelig hvilke typer objekter vi snakker om, og som får lov til å ligge i komplementet. Hvis for eksempel A består av heltall, gir det mening å definere A^c til å bestå av alle de heltallene som ikke ligger i A :

$$A^c = \mathbb{Z} \setminus A.$$

Dersom A er en mengde av reelle tall, gir det mening å definere

$$A^c = \mathbb{R} \setminus A.$$

Definisjonen av komplementet er altså *kontekstavhengig*. Mer generelt kan vi si at

$$A^c = U \setminus A,$$

der U er “universet av alle relevante objekter”. Nøyaktig hva U er, kommer an på sammenhengen. Om du tror at leseren er usikker på hva universet U er, så skriv heller $U \setminus A$, og si hva U er, istedenfor å skrive A^c . Husk: *Matematikk handler om å kommunisere klart, tydelig og utvetydig!*

Oppgave 2.11. Forklar hvorfor $(A^c)^c = A$.

Oppgave 2.12. Finn komplementet til de følgende tre mengdene. Redegjør for hva du mener universet er for hver mengde.

(a) $A = (3, \infty)$

(b) $B = \{2, 4, 6, 8, \dots\}$

(c) $C = \mathbb{Q}$.

La nå A og B begge være delmengder av et univers U , slik at komplementene A^c og B^c gir mening. *De Morgans lover* sier da at

$$(A \cup B)^c = A^c \cap B^c \quad \text{og} \quad (A \cap B)^c = A^c \cup B^c.$$

Oppgave 2.13. Den første loven kan vi uttale som at “komplementet av unionen mellom A og B er lik snittet mellom komplementene av A og B ”. Uttal den andre loven!

La oss bevise den første av lovene. Vi vet fra Seksjon 2.2 at to mengder er like dersom den ene er en delmengde av den andre, og *vice versa*. Det holder derfor å vise følgende to påstander:

$(A \cup B)^c \subseteq A^c \cap B^c$: Mengden $A \cup B$ består av alle objekter som enten ligger i A eller i B , så hvis $x \in (A \cup B)^c$, så kan x hverken ligge i A eller i B . Med andre ord er både $x \in A^c$ og $x \in B^c$. Men et objekt som ligger i to mengder, ligger også i snittet av mengdene, så $x \in A^c \cap B^c$. ■

$(A \cup B)^c \supseteq A^c \cap B^c$: La nå $x \in A^c \cap B^c$. Da ligger x både i A^c og i B^c , som er en annen måte å si at x hverken ligger i A eller i B . Da kan x umulig ligge i $A \cup B$, så $x \in (A \cup B)^c$. ■

Oppgave 2.14. La $A = \{x \in \mathbb{R} : x < 0\}$ og $B = \{x \in \mathbb{R} : x \geq 1\}$. Bruk De Morgans første lov til å bestemme $(A \cup B)^c$. (Her burde det være tydelig ut fra konteksten at universet er $\mathbb{R}$.)

Augustus De Morgan (1806–1871), britisk matematiker. En av opphavsmennene til matematisk induksjon, som vi skal se på i Kapittel 5.5.

2.5 Tupler og kartesisk produkt

La x og y være to objekter. Ut fra disse kan vi danne et *ordnet par* (eller bare et *par*) (x, y) . Vi kaller x og y *komponentene* (eller *elementene*) i paret — x er første komponent, og y andre komponent. I motsetning til en mengde, spiller rekkefølgen i et ordnet par en rolle; paret $(5, 8)$ er derfor ikke det samme som paret $(8, 5)$. Og i motsetning til en mengde, kan en tuppel inneholde to av samme objekt, for eksempel $(5, 5)$ og $(8, 8)$.

Vi kan også samle flere enn to objekter: Om x, y, z er tre objekter, er (x, y, z) en *trippel*, og mer generelt, om vi har n objekter $x_1, x_2, \dots, x_n$ (der $n \geq 2$ er et heltall), kan vi danne *n-tupplet*

$$(x_1, x_2, \dots, x_n).$$

En kort notasjon for akkurat det samme tupplet er $(x_i)_{i=1}^n$. Du skal få lære mye mer om tupler i lineær algebra-delen av MAT1105.

← *ordnet par*

← *komponent*

← *trippel*

← *n-tupplet*

Enkelte bruker notasjonen $\{x_i\}_{i=1}^n$ istedenfor $(x_i)_{i=1}^n$, men dette kan forveksles med den *uordnede* mengden $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$.

Oppgave 2.15. La $x_1, x_2, \dots, x_n$ være n tall. Hva er de viktigste forskjellene mellom n -tupplet $A = (x_1, x_2, \dots, x_n)$, og mengden $B = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$?

La A og B være to mengder. Vi definerer da det *kartesiske produktet*

$$A \times B = \{(x, y) : x \in A, y \in B\},$$

altså mengden av alle ordnede par, der første element ligger i A , og andre element i B . Hvis de to mengdene er like, skriver vi ofte bare $A^2 = A \times A$.

← *kartesisk produkt*, oppkalt etter den franske matematikeren og filosofen René Descartes (1596–1650).

Oppgave 2.16. La $A = \{1, 3, 4\}$ og $B = \{0, 4\}$. Skriv ut $A \times B$ som en liste.

Oppgave 2.17. La A og B være endelige mengder. Hvor mange elementer inneholder $A \times B$?

På samme måte kan vi definere det kartesiske produktet mellom flere mengder. Om vi har n mengder $A_1, A_2, \dots, A_n$, definerer vi

$$A_1 \times A_2 \times \dots \times A_n = \{(x_1, x_2, \dots, x_n) : x_1 \in A_1, \dots, x_n \in A_n\}.$$

Oppgave 2.18. Du har lært på skolen at punkter i planet kan representeres ved hjelp av sine koordinater (x, y) , og at vi kan betegne hele planet som $\mathbb{R}^2$. På hvilken måte passer dette inn med det du nå har lært om kartesisk produkt? Hva med punkter i rommet $\mathbb{R}^3$?

2.6 Flere oppgaver

Oppgave 2.19. For hvilke mengder A er $\emptyset \subseteq A$?

Oppgave 2.20. La $A = \{1, 3, 2, 8, 0\}$, $B = \{3, 8\}$, $C = \{5, -4, 8\}$ og $D = \{8\}$. Hvilke av disse mengdene er delmengde av en annen av mengdene?

Oppgave 2.21. Hvis A og B er endelige mengder, og $A \subseteq B$, hva kan vi da si om kardinaliteten til A og B ?

Oppgave 2.22. Bevis De Morgans andre lov på samme måte som vi viste den første.

Oppgave 2.23. Det finnes en enklere måte å bevise De Morgans andre lov, nå som vi har bevist den første:

- (a) Bruk den første loven til å vise at $(A^c \cup B^c)^c = (A^c)^c \cap (B^c)^c$.
- (b) Ta komplementet på begge sider.

3 FUNKSJONER

3.1 Hva er en funksjon?

Fra skolen er du vant til å jobbe med funksjoner av typen $f(x) = x^2 + 2x + 1$ og $g(x) = \sin(2\pi x)$ for $x \in \mathbb{R}$. Dette er *lukkede uttrykk* — uttrykk som kun inneholder aritmetiske operasjoner og noen få, velkjente operasjoner, slik som trigonometriske funksjoner. Slike funksjoner er viktige, men langt ifra alle funksjoner kan skrives som et lukket uttrykk.

← lukket uttrykk

Om A og B er mengder, er en *funksjon* (eller *avbildning*) fra A til B en operasjon som til hvert objekt i A tildeler ett, og bare ett, objekt i B . Hvis f er navnet på funksjonen, skriver vi

← funksjon, avbildning

$$f: A \rightarrow B$$

Se Appendiks B på side 45 om du vil ha en grundigere definisjon av hva en funksjon er.

(uttales “ f er en funksjon fra A til B ” eller “ f går fra A til B ”), og for enhver $x \in A$ skriver vi $f(x)$ for det tilhørende objektet i B . Det vi putter inn i funksjonen (her kalt x) er *argumentet* eller *variabelen* til funksjonen f . Mengden A er *definisjonsområdet*, og B er *verdiområdet* til f . (Ofte bruker vi de kortere termene *domene* og *kodomene*.) Dersom $B \subseteq \mathbb{R}$, det vil si at alle verdiene $f(x)$ er reelle tall, kaller vi funksjonen *reellvaluert*. Vi skriver noen ganger D_f for definisjonsområdet. Vi definerer også *verdimengden*, eller *bildet*, til f som

← argument, variabel

← definisjonsområde, verdiområde

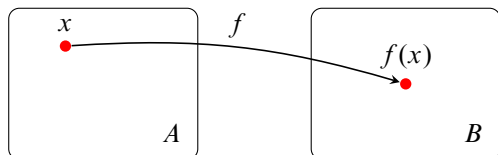
← reellvaluert

← verdimengde, bilde

$$V_f = \{f(x) : x \in A\},$$

altså mengden av alle verdier som f kan ta. Til slutt nevner vi at to funksjoner f og g er *like* dersom f og g har samme definisjonsområde, og om $f(x) = g(x)$ for alle x i definisjonsområdet. Vi skriver isåfall $f = g$.

← likhet mellom funksjoner



FIGUR 3.1: Funksjonen f avbilder punkter fra A inn i B .

Oppgave 3.1. Forklar hvorfor verdimengden til en funksjon alltid er en delmengde av verdiområdet. Finn en funksjon der verdimengden er *mindre* enn verdiområdet (altså at $V_f \subsetneq B$).

Vi har satt to strenge krav til funksjoner $f: A \rightarrow B$: Uansett hvilket objekt $x \in A$ vi velger, så skal $f(x)$ være et objekt i B , og $f(x)$ skal kun svare til *ett* objekt i B . Om vi forsøker oss på å definere en funksjon, og definisjonen faktisk oppfyller disse to kravene, sier vi at funksjonen er *veldefinert*.

← veldefinert

Eksempel 3.1. La f være gitt ved $f(x) = \frac{1}{x}$. Denne funksjonen er ikke en veldefinert funksjon fra $A = \mathbb{R}$ til $B = \mathbb{R}$, fordi $f(0) = \frac{1}{0}$ ikke er et objekt i verdiorrådet B . Om vi derimot hadde satt definisjonsområdet til for eksempel $A = (0, \infty)$ hadde f vært en veldefinert funksjon fra A til B , for uttrykket $\frac{1}{x}$ er et objekt i B for alle $x \in A$. $\square$

Mange funksjoner kan vi definere ved hjelp av funksjonsuttrykk, som i eksemplene over, men ofte må vi dele inn definisjonen i spesialtilfeller:

Eksempel 3.2. La $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ være gitt ved

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x} & \text{hvis } x \neq 0 \\ 0 & \text{hvis } x = 0. \end{cases}$$

Denne funksjonen er veldefinert: Ethvert tall $x \in \mathbb{R}$ er enten ulik 0, eller lik 0 (men aldri begge samtidig), og i begge tilfeller ligger funksjonsverdien $f(x)$ i verdiorrådet $\mathbb{R}$. $\square$

Eksempel 3.3. *Dirichlets funksjon* er funksjonen $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ gitt ved

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{hvis } x \in \mathbb{Q} \\ 0 & \text{hvis } x \notin \mathbb{Q}. \end{cases}$$

Denne funksjonen er veldefinert: Enhver $x \in \mathbb{R}$ ligger enten i $\mathbb{Q}$ eller utenfor $\mathbb{Q}$, og i begge tilfeller er $f(x)$ et element i $\mathbb{R}$. $\square$

Eksempel 3.4. La $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ være gitt ved

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{hvis } x \text{ er et partall} \\ 2 & \text{hvis } x \text{ er et oddetall} \\ 3 & \text{hvis } x \text{ er et primtall.} \end{cases}$$

Er f veldefinert? Alle $x \in \mathbb{N}$ er enten et partall, oddetall eller primtall, og verdiene 1, 2 og 3 ligger alle sammen i $\mathbb{N}$. Men alle primtall x er også enten partall eller oddetall, så når x er et primtall, vil $f(x)$ svare til *mer enn ett* objekt i verdimengden. Altså er ikke f veldefinert. $\square$

Oppgave 3.2. I Seksjon 2.3 introduserte vi *kardinaliteten* til en mengde — antallet elementer i mengden. På hvilken måte kan vi se på “kardinalitetsoperatoren” $\#$ som en funksjon? Hva er definisjonsområdet og verdiorrådet?

Oppgave 3.3. For en gitt mengde A definerer vi *identitetsfunksjonen* $\text{id}: A \rightarrow A$ som $\text{id}(x) = x$ for alle $x \in A$. (Når man vil framheve hvor funksjonen er definert, kan man kalle den id_A .) En nært beslektet funksjon er *inklusionsfunksjonen* ι (den greske bokstaven iota): Hvis A og B er vilkårlige mengder slik at $A \subseteq B$, så definerer vi $\iota: A \rightarrow B$ som $\iota(x) = x$. Forklar hvorfor disse funksjonene alltid er veldefinert.

← *identitetsfunksjonen*

← *inklusionsfunksjonen*

Funksjonene så langt har alle hatt et navn: Bokstaven f er kanskje det vanligste navnet, men navnet kan i prinsippet være hva som helst. Men det er ikke alltid vi har behov for å gi en funksjon sitt eget navn, for eksempel hvis vi omtaler funksjonen bare ett sted, og så aldri igjen. Da bruker vi symbolet $\mapsto$. Om vi vil omtale funksjonen $f(x) = x^2$ for $x \in \mathbb{R}$ kan vi skrive “ $x \mapsto x^2$ for $x \in \mathbb{R}$ ”. Om det er tydelig ut fra kontekst hva definisjonsområdet er, kan vi også unnlate å skrive “for $x \in \mathbb{R}$ ”, og bare skrive “ $x \mapsto x^2$ ”. Uttrykket “ $x \mapsto x^2$ ” uttales “ x avbildes til x^2 ” eller “ x går til x^2 ”.

3.2 Funksjonsegenskaper

Forskjellige funksjoner kan ha forskjellige egenskaper, og matematikere har funnet på en nærmest uuttømmelig mengde begreper for slike egenskaper. Vi skal her konsentrere oss om tre viktige egenskaper. La $f: A \rightarrow B$ være en funksjon.

- Vi sier at f er *injektiv* hvis $f(x_1) \neq f(x_2)$ for alle $x_1, x_2 \in A$ som er slik at $x_1 \neq x_2$. ← *injektiv*
- Vi sier at f er *surjektiv* hvis det for enhver $y \in B$ finnes en $x \in A$ slik at $f(x) = y$. ← *surjektiv*
- Vi sier at f er *bijektiv* hvis den er både injektiv og surjektiv. ← *bijektiv*

Med andre ord: En injektiv funksjon avbilder forskjellige objekter til forskjellige verdier, mens en surjektiv funksjon avbilder definisjonsområdet til *hele* verdiområdet.

Oppgave 3.4. En annen måte å definere bijektivitet på er som følger: En funksjon $f: A \rightarrow B$ er bijektiv hvis det for enhver $y \in B$ finnes én, og bare én, $x \in A$ slik at $f(x) = y$. Forklar hvorfor dette er det samme som å si at f er både injektiv og surjektiv.

Et synonym for injektiv er *en-til-en*, mens surjektiv kan byttes ut med *på*. Ordet injektiv kommer fra latin *injectivus*, "som kastes inn i", mens surjektiv kommer fra fransk *surjectif*, "som kastes oppå".

Eksempel 3.5. Funksjonen $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definert ved $f(x) = x^2$ er hverken surjektiv eller injektiv. For eksempel er $f(1) = f(-1)$, selv om $1 \neq -1$, så f er ikke injektiv. Videre finnes det ingen $x \in \mathbb{R}$ slik at $f(x) = -2$, så f er ikke surjektiv. □

Oppgave 3.5. Ved å endre verdiområdet kan vi gjøre en funksjon surjektiv. Finn en mengde B slik at funksjonen $f: \mathbb{R} \rightarrow B$ gitt ved $f(x) = x^2$ er surjektiv. Forklar hvorfor den fremdeles ikke er injektiv.

Oppgave 3.6. Forklar hvorfor følgende definisjon av surjektivitet betyr nøyaktig det samme som den ovenfor:

Vi sier at f er *surjektiv* hvis verdiområdet B og verdimengden V_f til f er like.

3.3 Operasjoner med funksjoner

Vi er ofte interessert i å kombinere to eller flere funksjoner for å skape nye funksjoner — eller motsatt, å stykke opp en funksjon i flere (forhåpentligvis enklere) funksjoner. Vi skal her se på to måter å kombinere funksjoner på.

Hvis $f, g: A \rightarrow \mathbb{R}$ er to reellvaluerte funksjoner, er $f + g$ en ny funksjon fra A til $\mathbb{R}$ definert som

$$(f + g)(x) = f(x) + g(x) \quad \text{for } x \in A.$$

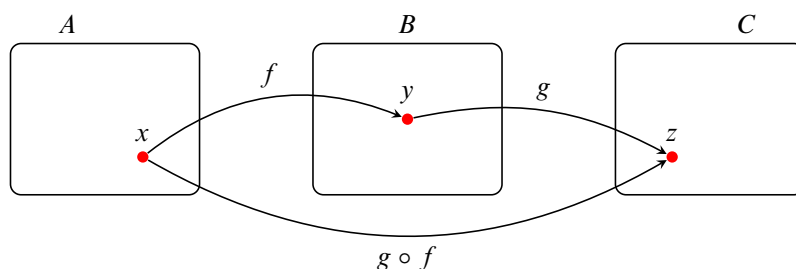
På samme måte kan vi definere $f - g$, fg og $\frac{f}{g}$ (så lenge g ikke tar verdien 0).

En annen måte å kombinere funksjoner på er *komposisjon*. Når $f: A \rightarrow B$ og $g: B \rightarrow C$ er funksjoner, er komposisjonen $g \circ f$ en ny funksjon fra A til C gitt ved

$$x \mapsto g(f(x)).$$

Når vi skriver $f, g: A \rightarrow \mathbb{R}$ mener vi at både f og g er funksjoner fra A til $\mathbb{R}$.

← *komposisjon*



FIGUR 3.2: Funksjonen f avbilder punkter fra A inn i B , og g avbilder punkter fra B inn i C . Komposisjonen $g \circ f$ gjør begge operasjonene på én gang.

Oppgave 3.7. Skriv funksjonen $h: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ gitt ved $h(x) = \cos(x^2)$ som komposisjonen av to funksjoner. Husk å oppgi verdi- og definisjonsområdene til de to funksjonene.

Oppgave 3.8. La $f: A \rightarrow B$ og $g: B \rightarrow C$ være to funksjoner. Forklar hvorfor $g \circ f$ er veldefinert.

Oppgave 3.9. La $f: A \rightarrow B$ og $g: B \rightarrow C$ være to funksjoner. Hvorfor står funksjonene i rekkefølgen $g \circ f$, og ikke $f \circ g$? Forklar hvorfor funksjonen $f \circ g$ gitt ved $x \mapsto f(g(x))$ ikke nødvendigvis er veldefinert.

Ofte kan vi analysere kompliserte funksjonsuttrykk ved å bryte det ned i enklere bestanddeler — skrive det som en komposisjon av enklere uttrykk — og studere disse delene istedet. Dersom egenskapene til bestanddelene “arves” når vi komponerer dem, kan vi konkludere de samme egenskapene for det kompliserte uttrykket.

Oppgave 3.10. Bevis at injektivitet og surjektivitet arves av komposisjon. Med andre ord: Hvis både $f: A \rightarrow B$ og $g: B \rightarrow C$ er enten injektive eller surjektive, vis at også $g \circ f$ er injektiv/surjektiv.

3.4 Inversfunksjoner

Vi tenker på funksjonen $f: A \rightarrow B$ som en operasjon som tar deg fra A til B . Ofte har vi behov for å gå tilbake igjen, fra B til A . Om for eksempel $f(t)$ sier hvor mye penger du har på sparekontoen etter å ha spart i t dager, kan du være interessert hvor lang tid det vil ta før du har spart opp 10 000 kroner — med andre ord, du vil finne en t slik at $f(t) = 10\,000$. Denne operasjonen kaller vi å *invertere* funksjonen.

La $f: A \rightarrow B$ være en funksjon. Vi sier at $g: B \rightarrow A$ er *inversfunksjonen* til f dersom

$$\begin{aligned} g(f(x)) &= x && \text{for alle } x \in A, \text{ og} \\ f(g(y)) &= y && \text{for alle } y \in B. \end{aligned}$$

Med andre ord: g reverserer det f har gjort, og f reverserer det g har gjort. Merk at verdiorrådet til f er definisjonsområdet til g , og vice versa. Vi sier at f er *inverterbar*

← *inversfunksjon*

Andre navn på inversfunksjonen er den *inverse* eller den *omvendte* funksjonen til f .

← *inverterbar*

dersom den har en inversfunksjon. Vi betegner ofte inversfunksjonen til f som f^{-1} (uttales “ f invers”). Vi skal se senere, i Kapittel 5, at en funksjon er inverterbar nøyaktig når den er bijektiv.

Pass på å ikke forveksle f^{-1} med uttrykket $\frac{1}{f}$.

Oppgave 3.11. Skriv betingelsene for at $g: B \rightarrow A$ er inversfunksjonen til $f: A \rightarrow B$ ved hjelp av komposisjon og identitetsfunksjonen (se oppgave 3.3 på side 16).

Eksempel 3.6. Vi vil finne inversfunksjonen til funksjonen $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ gitt ved $f(x) = 2x$. Vi starter med å sette $f(x) = y$, og så løse ligningen for x . Vi får da $2x = y$, altså $x = y/2$. Inversfunksjonen til f er da $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ gitt ved $g(y) = y/2$. $\square$

Oppgave 3.12. Hva kan være et fornuftig valg av funksjonen f i eksempelet om penger på en sparekonto? Hva er inversfunksjonen til f ?

Oppgave 3.13. Er følgende funksjoner inverterbare? Finn isåfall inversfunksjonen.

- (a) $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ gitt ved $f(x) = 3x + 5$.
- (b) $f: [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ gitt ved $f(x) = x^2$.
- (c) $f: [-1, 1] \rightarrow [0, 1]$ gitt ved $f(x) = x^2$.

3.5 Flere oppgaver

Oppgave 3.14. Thomaes funksjon $f: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ er gitt ved

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{q} & \text{hvis } x = \frac{p}{q}, \text{ der } p \in \mathbb{N} \text{ og } q \in \mathbb{N} \text{ er innbyrdes primiske}^* \\ 0 & \text{ellers.} \end{cases}$$

Forklar hvorfor f er veldefinert.

* To naturlige tall p og q er *innbyrdes primiske* hvis det eneste tallet de begge er delelige med, er 1. Merk at alle positive $x \in \mathbb{Q}$ kan skrives som $x = p/q$, der $p, q \in \mathbb{N}$ er innbyrdes primiske.

Oppgave 3.15. Bevis at funksjonen $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ gitt ved $f(x) = x^3$ er bijektiv.

4 UTSAGNSLOGIKK

Formell logikk, som du nå skal få en innføring i, kan virke fryktelig tungvint og abstrakt til å begynne med. Målet vårt er ikke at du skal bli en mester i å tyde lange rekker av logikksymboler, men at du skal bli såpass trygg på logikkens regler at du *ikke trenger* logikksymbolene for å konstruere korrekte og letteste logiske argumenter.

4.1 Utsagn og predikater

Et *utsagn* er en setning som enten er sann eller usann. For eksempel er både

$$2 + 2 = 4 \quad \text{og} \quad 2 + 2 = 5$$

utsagn; ett av dem er sant, det andre usant. Vi bruker ofte bokstavene P, Q, R for å betegne utsagn, og skriver for eksempel

$$P: 2 + 2 = 4.$$

Her er P utsagnet som sier at to pluss to er fire. Ifølge definisjonen for utsagn, har det ingenting å si om du og jeg vet om setningen er sann eller usann, så setningen

Alle partall større enn 2 kan skrives som summen av to primtall*

er definitivt et utsagn, selv om ingen vet om det er sant. På den annen side er ingen av følgende setninger utsagn:

$$2 + 2$$

$$\text{Hva er løsningen av } 3x + 2 = 11?$$

$$\text{Integrer } f(x) = e^x \text{ fra 0 til 1.}$$

Selv om alle disse tre setningene ser “matematiske” ut, kan man ikke si at de er *sanne* eller *usanne*. De er derfor ikke utsagn.

Vi møter ofte på påstander som avhenger av én eller flere variabler:

n er et partall.

Denne setningen ser absolutt ut som et utsagn, men hvorvidt den er sann eller ikke avhenger av verdien av n . Setningen er derfor ikke *i seg selv* sann eller usann, og vi kan ikke kalle den et utsagn. Den er derimot et eksempel på et *predikat*: En setning som avhenger av én eller flere variabler, og som for hvert valg av disse variablene enten er sann eller usann. Vi skriver gjerne predikater slik:

$$P(n): n \text{ er et partall.}$$

Predikatet P er i seg selv hverken sant eller usant, men for eksempel $P(2)$ og $P(4)$ er sanne, mens $P(1)$ og $P(\text{eple})$ er usanne.

Som oftest vil vi begrense hvilke verdier man kan bruke som argument i et predikat. I eksempelet over kan vi for eksempel si at n må være et reelt tall, og skriver da

$$P(n): n \text{ er et partall} \quad (\text{for } n \in \mathbb{R}).$$

← utsagn

* Dette er *Goldbachs formodning*.

← predikat

Oppgave 4.1. Bestem om følgende setninger er utsagn, predikat, eller ingen av delene. Si også om hvert av utsagnene er sanne eller usanne (om mulig).

- (a) $2 \in \mathbb{N}$.
- (b) Alle partall er delelig med 2.
- (c) Det finnes liv på andre planeter.
- (d) $3x + 8 = 17$.
- (e) Mengdene $\mathbb{N}$ og $\mathbb{Z}$ er blå-grønne, men ikke $\mathbb{R}$.
- (f) Summen av to oddetall er et oddetall.
- (g) $f(x) = x^2$ for $x \in \mathbb{R}$.
- (h) $-2 \in \mathbb{N}$.
- (i) Utsagnslogikk er gøy.
- (j) Hvis n er et naturlig tall, er $n > 8$.
- (k) Det finnes uendelig mange primtall.
- (l) $2 + 2 = 5$.
- (m) Det finnes uendelig mange primtall p slik at også $p + 2$ er et primtall.

4.2 Konnektiver

Vi kan kombinere to eller flere utsagn eller predikater ved hjelp av *konnektiver* for å danne nye utsagn eller predikater. Konnektivene vi skal ta for oss her er:

← konnektiv

Symbol	Betydning
$\neg$	negasjon
$\wedge$	og
$\vee$	eller
$\Rightarrow$	impliserer
$\Leftarrow$	følger fra
$\Leftrightarrow$	ekvivalent med

4.2.1 Negasjon

Negasjon er det enkleste konnektivet vi har. Hvis P er et utsagn, er $\neg P$ (uttales “ikke P ”) det motsatte av P : Det er et nytt utsagn som er sant når P er usant, og usant når P er sant. Vi kan oppsummere negasjonskonnektivet med en *sannhetstabell*:

← negasjon

← sannhetstabell

P	$\neg P$
U	S
S	U

Andre navn på sannhetskonstan-
tene U (usann) og S (sann) er 0
og 1, F (false) og T (true), og $\perp$
og $\top$. Negasjonen $\neg P$ skrives
også ofte som $\sim P$ eller $\overline{P}$.

Første linje leser vi “hvis P er usann, er ikke P sann”, og andre linje “hvis P er sann, er ikke P usann”.

Oppgave 4.2. Forklar hvorfor utsagnene P og $\neg(\neg P)$ betyr nøyaktig det samme. (Det andre uttrykket kan vi kalle en “dobbel negasjon”.)

Akkurat som i algebraen bruker vi parenteser for å uttrykke hvilke deler av et utsagn som skal evalueres først.

Oppgave 4.3. Finn negasjonen av følgende utsagn.

- (a) $x \leq 5$ (c) $2 + 2 = 5$
 (b) $n \in \mathbb{Q}$ (d) $A = \emptyset$.

Oppgave 4.4. La A og B være mengder, og la P være utsagnet $A \subseteq B$. Hvilket av følgende utsagn uttrykker $\neg P$?

- (a) $B \subseteq A$
 (b) $B \in A$
 (c) $A = \emptyset$
 (d) $B = \emptyset$
 (e) Det finnes $x \in A$ slik at $x \in B$
 (f) Det finnes $x \in A$ slik at $x \notin B$.

4.2.2 Konnektivet “og”

Hvis P og Q er utsagn, er $P \wedge Q$ (uttales “ P og Q ”) et nytt utsagn som er sant kun dersom både P og Q er sanne. Dersom P og Q er to utsagn, er $P \wedge Q$ definert slik:

P	Q	$P \wedge Q$
U	U	U
U	S	U
S	U	U
S	S	S

← og

En sannhetstabell må inneholde rader for absolutt alle mulige kombinasjoner av P og Q . Siden hver av påstandene kan ha to tilstander (sant eller usant), og det er to utsagn (P og Q), blir det $2 \cdot 2 = 4$ mulige kombinasjoner.

Vi kan kombinere flere enn to utsagn ved hjelp av konnektiver: Om P , Q , R er utsagn, er $(P \wedge Q) \wedge R$ et nytt utsagn som er sant kun dersom både $P \wedge Q$ og R er sanne. Om du tenker deg litt om, er dette nye utsagnet nøyaktig det samme som $P \wedge (Q \wedge R)$; de er sanne kun dersom både P , Q og R er sanne. Siden rekkefølgen vi evaluerer konnektivene i dette tilfellet ikke har noe å si, kan vi like greit skrive det som

$$P \wedge Q \wedge R.$$

4.2.3 Konnektivet “eller”

Konnektivet $\vee$ (uttales “eller”) er sant hvis minst ett av utsagnene er sanne:

← eller

P	Q	$P \vee Q$
U	U	U
U	S	S
S	U	S
S	S	S

Vi kan for eksempel skrive utsagnet “det er helg” som $P \vee Q$, der P er utsagnet “det er lørdag” og Q er utsagnet “det er søndag”.

Oppgave 4.5. Forklar hvorfor utsagnene $(P \vee Q) \vee R$ og $P \vee (Q \vee R)$ er like, for eksempel ved å lage en sannhetstabell. Forklar hvorfor dette betyr at uttrykket $P \vee Q \vee R$ gir mening.

Oppgave 4.6. Forklar hvorfor utsagnene $(P \wedge Q) \vee R$ og $P \wedge (Q \vee R)$ ikke er like, for eksempel ved å lage en sannhetstabell. Forklar hvorfor dette betyr at for å gi mening til uttrykket $P \wedge Q \vee R$, må man spesifisere hvilken av konnektivene $\wedge$ og $\vee$ som har “forrang”.

I logikken har man innført regler for *presedens* av konnektiver, som sier i hvilken rekkefølge konnektiver skal evalueres. Dette med rekkefølge er altså *egentlig* ikke et problem, men for å øke leseligheten bør du likevel bruke parenteser om det skulle være tvil om hvordan man leser uttrykket ditt.

4.2.4 Konnektivet “impliserer”

Konnektivet $\Rightarrow$ er nok det du vil møte på mest senere i studiene. Vi leser uttrykket $P \Rightarrow Q$ som “ P impliserer Q ”, som vi tolker som “ Q er alltid sant når P er sant”, eller “når P er sant, er også Q sant”. Vi kan for eksempel skrive

← impliserer

jeg bor i Oslo $\Rightarrow$ jeg bor i Norge

og

$$x = 2 \Rightarrow x^2 = 4.$$

Uttrykket $Q \Leftarrow P$ (uttales “ Q er implisert av P ” eller “ Q følger fra P ”) betyr det samme som $P \Rightarrow Q$.

Merk at implikasjonspilen har en *retning*. Hvis $P \Rightarrow Q$ er sant, er ikke nødvendigvis $P \Leftarrow Q$ sant. (Vi kan ikke reversere implikasjonen i de to eksemplene ovenfor — det finnes andre steder å bo i Norge enn Oslo, og ligningen $x^2 = 4$ har andre løsninger enn $x = 2$.)

Selv om du for det meste vil treffe på symbolet $\Rightarrow$ litt uformelt, som i eksemplene over, kan det være nyttig å se på $\Rightarrow$ som et konnektiv. Sannhetstabellen til $\Rightarrow$ er som følger:

P	Q	$P \Rightarrow Q$
U	U	S
U	S	S
S	U	U
S	S	S

Mange blir overrasket første gang de ser denne tabellen. Den siste linjen virker kanskje grei, men hva med de tre andre? For å se at tabellen er korrekt, kan vi snu spørsmålet på hodet: Hva skal til for at utsagnet $P \Rightarrow Q$ er *usant*? Siden $P \Rightarrow Q$ betyr “ Q er sann når P er sann”, må utsagnet $P \Rightarrow Q$ være usant kun dersom P er sann, men Q er usann. Og som du ser av tabellen er dette den eneste kombinasjonen som gjør $P \Rightarrow Q$ usann.

Oppgave 4.7. Lag en sannhetstabell med kolonnene P , Q , $P \Rightarrow Q$ og $P \wedge \neg Q$. Forklar hvorfor $P \wedge \neg Q$ er negasjonen av $P \Rightarrow Q$.

4.2.5 Konnektivet “ekvivalent med”

Konnektivet $\Leftrightarrow$ (uttales “*er ekvivalent med*”, eller “hvis og bare hvis”, eller “betyr det samme som”) uttrykker at to utsagn betyr akkurat det samme. Sannhetstabellen er som følger:

← *ekvivalent med*

P	Q	$P \Leftrightarrow Q$
U	U	S
U	S	U
S	U	U
S	S	S

Oppgave 4.8. La x være et tall. Forklar hvorfor utsagnet $2x - 3 = 5 \Leftrightarrow x = 4$ er sant.

Oppgave 4.9. La P og Q være utsagn. Vis at $P \Leftrightarrow Q$ er det samme som $(P \Rightarrow Q) \wedge (Q \Rightarrow P)$.

4.3 De Morgans lover

De Morgans lover er to regneregler vi bruker for å finne negasjonen av konnektivene *og* og *eller*. Om P og Q er utsagn, sier lovene at

Ja, det er den samme De Morgan som i Seksjon 2.4.

$$\neg(P \vee Q) \Leftrightarrow \neg P \wedge \neg Q \quad \text{og} \quad \neg(P \wedge Q) \Leftrightarrow \neg P \vee \neg Q.$$

Her bruker vi konnektivet $\Leftrightarrow$ for å kommunisere at uttrykket på venstre side (altså $\neg(P \vee Q)$ i den første loven) betyr akkurat det samme som uttrykket på høyre side (altså $\neg P \wedge \neg Q$).

Oppgave 4.10. Den første loven kan vi uttale som “det motsatte av at enten P eller Q er sann, er at hverken P eller Q er sanne”. Uttal den andre loven!

Oppgave 4.11. Bruk De Morgans lover på utsagnet

$$\neg((\neg P \vee Q) \wedge (\neg Q \vee R)).$$

Forsøk å gi mening til uttrykket du ender opp med ved å uttale det, slik som i forrige oppgave.

4.4 Kvantorer

La P være et predikat, for eksempel

$P(n)$: n er et partall.

Da kan vi for eksempel si at

$$P(2), P(4), P(6), P(8), P(10), P(12)$$

alle er sanne utsagn, men det er opplagt tungvint (for ikke å snakke om umulig) å skrive ut alle de sanne utsagnene man kan danne med P . *Kvantorer* hjelper oss med å forkorte slike uttrykk. De to kvantorene i logikk er $\forall$ (uttales “for alle”) og $\exists$ (uttales “det eksisterer”).

← *kvantor*

Andre navn på $\forall$ er *allkvantoren* og *den universelle kvantoren*, mens $\exists$ også kalles *eksistenskvantoren*.

4.4.1 De to kvantorene

Dersom P er predikatet om partall nevnt ovenfor, kan vi skrive

$$\forall n \in \mathbb{N}, P(2n).$$

← $\forall$

Dette leser vi “for alle $n \in \mathbb{N}$ er $P(2n)$ sann”, eller mer utfyllende, “for alle naturlige tall n , er tallet $2n$ et partall”.

← *for alle*

Oppgave 4.12. La $A \subseteq \mathbb{N}$ være en mengde av naturlige tall. Bruk kvantoren $\forall$ for å uttrykke utsagnet “alle elementer i A er større enn 8”.

Kvantoren $\exists$ uttrykker eksistensen av et objekt med en bestemt egenskap. Om P er predikatet ovenfor, og vi vil uttrykke at en gitt mengde A inneholder et partall, kan vi skrive

← $\exists$

$$\exists n \in A, P(n).$$

Dette leser vi “*det eksisterer* minst én $n \in A$ slik at $P(n)$ ”, eller mer utfyllende, “det eksisterer minst ett element $n \in A$ slik at n er et partall”. Alle disse variantene er bare tungvinte måter å si “ A inneholder et partall”.

← *det eksisterer*

Vi har en siste kvantor, som egentlig bare er negasjonen av den eksistensielle kvantoren: $\nexists$ (uttales “det eksisterer ikke”). For eksempel kan vi skrive

← $\nexists$

$$\nexists x \in \mathbb{Q}, x^2 = 2,$$

som vi kan uttale som “det finnes ingen $x \in \mathbb{Q}$ slik at $x^2 = 2$ ”. Med andre ord: $\sqrt{2}$ er ikke et rasjonalt tall.

4.4.2 Å kombinere kvantorer

Vi kan kombinere kvantorene for å danne nye utsagn. For eksempel sier utsagnet

$$P: \forall \text{ hus } x, \exists \text{ person } y, y \text{ bor i } x$$

at det i alle hus bor en person. (Det kan diskuteres om dette utsagnet er sant, men det er ikke langt fra sannheten.) Om vi bytter om på rekkefølgen på kvantorene får vi utsagnet

$$Q: \exists \text{ person } y, \forall \text{ hus } x, y \text{ bor i } x$$

altså at det finnes en person som bor i alle hus. *Ta en pause her og overbevis deg om at dette overhodet ikke er det samme som P !* Om du bytter rekkefølge på kvantorene, vil du alltid få et annet utsagn. Vær derfor svært forsiktig når du formulerer utsagn med flere kvantorer!

Eksempel 4.1. Utsagnet

$$P: \forall x \in \mathbb{R}, \exists y \in \mathbb{R}, x = y^3$$

sier at det for alle $x \in \mathbb{R}$ finnes en $y \in \mathbb{R}$ slik at $x = y^3$. Sagt på en annen måte: Alle reelle tall x kan skrives på formen y^3 for et reelt tall y . (Påstanden er sann, for vi kan la $y = \sqrt[3]{x}$.) Hvis vi bytter om på rekkefølgen av kvantorene i utsagnet P over, får vi utsagnet

$$Q: \exists y \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathbb{R}, x = y^3,$$

som sier at det finnes et reelt tall y som er slik at uansett hvilket tall $x \in \mathbb{R}$ vi velger, så er $x = y^3$. Vær sikker på at du forstår at dette utsagnet overhodet ikke er sant, før du går videre. $\square$

Oppgave 4.13. Uttrykk følgende utsagn ved hjelp av kvantorer.

- (a) Alle heltall er naturlige tall.
- (b) For alle reelle tall finnes et naturlig tall som er større.
- (c) For alle naturlige tall a og b finnes et naturlig tall c slik at $a^2 + b^2 = c^2$.
- (d) Alle reelle tall kan skrives som kvadratroten av et annet tall.

Bonuspoeng hvis du også kan si hvilke utsagn som er sanne!

4.4.3 Negasjon av kvantorer

Med De Morgans lover kan vi enkelt finne negasjonen av påstander som inneholder konnektivene *og* og *eller*. Hvordan finner vi negasjonen av utsagn med kvantorer? La oss si at P er et predikat, og ta det generelle utsagnet

$$Q: \forall x \in A, P(x),$$

som sier at alle elementer x i mengden A tilfredsstiller utsagnet $P(x)$. Hva skal til for at Q er usann? Negasjonen $\neg Q$ må bety at det finnes minst ett element $x \in A$ slik at $P(x)$ er usann — det vil si, $\neg P(x)$ er sann. Vi kan dermed si at negasjonen av Q er

$$\neg Q \Leftrightarrow \exists x \in A, \neg P(x).$$

Vi kan argumentere på samme måte med kvantoren $\exists$. Vi har allerede sett at negasjonen av $\exists$ er $\forall$, men det er nyttig å finne ut hva dette faktisk betyr. Det motsatte av utsagnet

$$R: \exists x \in A, P(x)$$

(“det eksisterer en x i A slik at $P(x)$ ”) må være at det *ikke* eksisterer en $x \in A$ slik at $P(x)$. Sagt på en annen måte: Uansett hvilken $x \in A$ vi velger oss, er $P(x)$ usann. Vi kan dermed skrive negasjonen av R som

$$\neg R \Leftrightarrow \forall x \in A, \neg P(x).$$

Huskeregelen er altså: For å finne negasjonen til et utsagn med kvantorer, bytter vi om $\forall$ med $\exists$ og $\exists$ med $\forall$, og negerer predikatet:

$$\neg(\forall x \in A, P(x)) \Leftrightarrow \exists x \in A, \neg P(x)$$

og

$$\neg(\exists x \in A, P(x)) \Leftrightarrow \forall x \in A, \neg P(x).$$

Eksempel 4.2. Vi ønsker å finne negasjonen av utsagnet

Husk at vi bruker konnektivet $\Leftrightarrow$ (“ekvivalent med”) for å uttrykke at $\neg Q$ er akkurat det samme som uttrykket på høyre side.

$$P: \forall n \in \mathbb{N}, \exists m \in \mathbb{N}, m > n$$

(“for alle naturlige tall finnes et naturlig tall som er større”). Siden P er satt sammen av flere utsagn, er det lurt å begynne med å stykke opp P med parenteser:

$$P \Leftrightarrow \forall n \in \mathbb{N}, (\exists m \in \mathbb{N}, m > n).$$

Vi bruker nå huskeregel:

$$\neg P \Leftrightarrow \exists n \in \mathbb{N}, \neg(\exists m \in \mathbb{N}, m > n).$$

På predikatet $\neg(\exists m \in \mathbb{N}, m > n)$ kan vi bruke huskeregel igjen, og få

$$\neg P \Leftrightarrow \exists n \in \mathbb{N}, \forall m \in \mathbb{N}, \neg(m > n).$$

Til slutt observerer vi at $\neg(m > n)$ er det samme som $m \leq n$, så vi får

$$\neg P \Leftrightarrow \exists n \in \mathbb{N}, \forall m \in \mathbb{N}, m \leq n$$

(“det finnes et naturlig tall slik at alle andre naturlige tall er mindre enn (eller lik) det tallet”, eller sagt på en annen måte, “det finnes et største naturlig tall”). Er P eller $\neg P$ sann? $\square$

Oppgave 4.14. Finn negasjonen av hvert av de følgende utsagnene. Gjør rede for hvordan du har tolket utsagnet, om du mener det er tvetydig. Prøv å formulere negasjonen så naturlig som mulig — ikke bare sett “ikke” foran utsagnet.

- (a) P_1 : Alle sauer har hvit ull.
- (b) P_2 : Det finnes mennesker som ikke liker is til dessert.
- (c) P_3 : Det regner alltid i Bergen.
- (d) P_4 : Alle myntsamlere har en romersk mynt i samlingen.
- (e) P_5 : Noen, men ikke alle, svensker har blondt hår.

Hint: Om nødvendig kan du stykke opp utsagnet ved hjelp av predikater, konnektiver og kvantorer, og så bruke reglene for negasjon.

4.5 Oppsummering

Din viktigste oppgave når du kommuniserer matematikk, er å uttrykke deg klart og tydelig. Matematiske symboler, slik som konnektiver og kvantorer, er nyttige verktøy for å uttrykke ideer, men det er ofte bedre å bruke ord istedenfor symboler. Selv en professor i matematikk vil synes det er vanskelig å tyde utsagnet

$$P: \forall n \in \mathbb{N}, \exists m \in \mathbb{N}, (m \geq n) \wedge (\nexists p, q \in \mathbb{N}, p > 1 \wedge q > 1 \wedge m = pq)$$

og vil foretrekke den langt enklere — men ekvivalente — varianten

P : Det finnes uendelig mange primtall.

Det er likevel viktig at du lærer deg å “oversette” en intuitiv, muntlig beskrivelse av et utsagn til en presis formulering med symboler — og motsatt, at du klarer å tolke og gi intuisjon til kompliserte matematiske uttrykk.

- Et *utsagn* er en setning som enten er sann eller usann. Det er irrelevant om *du* vet om den er sann eller ikke.
- *Konnektiver* er operasjoner på ett eller flere utsagn som produserer et nytt utsagn:

Negasjon: Om P er et utsagn, er $\neg P$ ("ikke P ") et utsagn som er sant kun når P er usant.

Og: Om P og Q er utsagn, er $P \wedge Q$ (" P og Q ") et utsagn som er sant kun når både P og Q er sanne.

Eller: Om P og Q er utsagn, er $P \vee Q$ (" P eller Q ") et utsagn som er sant når enten P , Q , eller begge er sanne.

Impliserer: Om P og Q er utsagn, er $P \Rightarrow Q$ (" P impliserer Q ") et utsagn som er *usant* kun når P er sant, men Q er usant. Vi tolker $P \Rightarrow Q$ som "når P er sant, er også Q sant".

Ekvivalent med: Om P og Q er utsagn, er $P \Leftrightarrow Q$ (" P er ekvivalent med Q ") et utsagn som er sant kun når både P og Q er sanne, eller både P og Q er usanne. Vi tolker $P \Leftrightarrow Q$ som " P og Q representerer nøyaktig samme utsagn".

- *Kvantorene* bruker vi for å samle mange utsagn inn i ett:

For alle: Utsagnet $\forall n \in \mathbb{N}$, $P(n)$ betyr at $P(n)$ er sann, uansett hva $n \in \mathbb{N}$ er.

Det eksisterer: Utsagnet $\exists n \in \mathbb{N}$, $P(n)$ betyr at det finnes en $n \in \mathbb{N}$ slik at $P(n)$ er sann.

- Vi har flere regler for å finne negasjonen av sammensatte utsagn:

- Det motsatte av P og Q , er ikke P eller ikke Q :

$$\neg(P \wedge Q) \Leftrightarrow \neg P \vee \neg Q.$$

- Det motsatte av P eller Q , er ikke P og ikke Q :

$$\neg(P \vee Q) \Leftrightarrow \neg P \wedge \neg Q.$$

- Det motsatte av at $P(n)$ er sann for alle n , er at det finnes en n slik at $P(n)$ er usann:

$$\neg(\forall n, P(n)) \Leftrightarrow \exists n, \neg P(n).$$

- Det motsatte av at det finnes en n slik at $P(n)$ er sann, er at $P(n)$ er usann for alle n :

$$\neg(\exists n, P(n)) \Leftrightarrow \forall n, \neg P(n).$$

4.6 Flere oppgaver

Oppgave 4.15. Vis at $P \Leftrightarrow Q$ er det samme som $(P \Rightarrow Q) \wedge (\neg P \Rightarrow \neg Q)$.

Oppgave 4.16. La $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ være en funksjon, og betrakt de to utsagnene

$$P: \exists M > 0, \forall x \in \mathbb{R}, |f(x)| \leq M$$

$$Q: \forall x \in \mathbb{R}, \exists M > 0, |f(x)| \leq M$$

(der vi bare har byttet om på rekkefølgen på kvantorene).

- (a) Vis at P og Q ikke er ekvivalente. (Det holder da å gi et eksempel på en f som oppfyller Q , men ikke P .)
- (b) Gi en intuitiv forklaring på hva P betyr.
- (c) Finnes det funksjoner $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ som ikke oppfyller Q ?

5 BEVISTEKNIKK

Matematiske teoremer kan som oftest formuleres slik:

Teorem. *Utsagn P er sant.*

eller slik:

Teorem. *Hvis utsagn P er sant, så er utsagn Q sant.*

eller slik:

Teorem. *Hvis n er slik at $P(n)$ er sant, så er $Q(n)$ sant.*

De to siste kalles *betingede utsagn*: Q er sant på den betingelsen at P er sant, eller med notasjonen fra forrige kapittel: $P \Rightarrow Q$. Vi kaller P (eller $P(n)$) *antagelsen* i teoremet, og Q *konklusjonen* i teoremet.

← *betinget utsagn*

← *antagelse*

← *konklusjon*

Som vi så i Kapittel 1 må teoremer alltid ha et bevis, og i dette kapitlet skal vi se på de viktigste beviste knikkene og de vanligste typene beviser. Vi skal ta for oss en generell fremgangsmåte for å bevise teoremer. Samtidig må vi advare mot å tro at beviste knikk kan pugges, som om det var en matoppskrift. For å bevise vanskelige teoremer må du bruke hodet, og gjerne også en solid dose kreativitet!

5.1 En generell fremgangsmåte

Vi skal illustrere fremgangsmåten med følgende eksempel:

Teorem 5.1. *Hvis n er et tall som er delelig med 4, så er n et partall.*

Antagelsen i dette teoremet er

$P(n)$: n delelig med 4

og konklusjonen er

$Q(n)$: n et partall.

La oss utarbeide et bevis for teoremet.

Steg 1: Skriv tydelig hva vi antar, og hva vi vil konkludere med.

Vårt første forsøk på et bevis blir da:

Vi vet: n er delelig med 4.

Vil vise: n er et partall.

Siden antagelsen og konklusjonen inneholder tekniske begreper (“delelig med” og “partall”), må vi vite nøyaktig hva disse begrepene betyr. Derfor:

Steg 2: Fyll inn definisjonen av alle begreper.

Og her er definisjonene vi trenger:

Definisjon. Et heltall n er *delelig med* et heltall m dersom det finnes et annet heltall k slik at $n = m \cdot k$. Et *partall* er et tall som er delelig med 2.

← *delelig*

← *partall*

(Før du går videre bør du stoppe opp og sjekke at denne definisjonen svarer til din egen forståelse av begrepene “delelig med” og “partall”.) Vårt andre forsøk blir da:

Vi vet: n er delelig med 4, det vil si at det finnes et heltall k slik at $n = 4k$.

Vil vise: n er et partall, det vil si at det finnes et tall ℓ slik at $n = 2\ell$.*

* Hvorfor bruker vi symbolet ℓ her, og ikke k ?

Ofte må du gå tilbake til Steg 2 flere ganger, og sette inn definisjonen av uttrykk som dukker opp underveis.

Foreløpig har vi ikke bevist noe som helst, vi har bare skrevet tydelig hva det er vi vil vise. Det neste steget er å faktisk bevise det vi ønsker å bevise. Utover i dette kapittelet skal vi se på flere forskjellige bevisteknikker, så foreløpig nøyer vi oss med:

Steg 3: Fyll inn, steg for steg, et argument som tar deg fra antagelsen til konklusjonen.

La oss gjøre et tredje forsøk:

Vi vet: n er delelig med 4, det vil si at det finnes et heltall k slik at $n = 4k$.

Vil vise: n er et partall, det vil si at det finnes et tall ℓ slik at $n = 2\ell$.

- Vi vet at $4 = 2 \cdot 2$.
- Altså er $n = 2 \cdot 2 \cdot k$.
- Vi kan skrive $n = 2 \cdot \ell$, der $\ell = 2 \cdot k$.
- ℓ er et heltall.
- n er derfor et partall.

Dette argumentet tar oss hele veien fra antagelsen til konklusjonen. Så da er vi ferdig! Eller er vi det? Når vi skriver matematikk er det vår oppgave å kommunisere så klart og tydelig som mulig. Og selv om argumentet ovenfor er riktig, er det ikke spesielt tydelig, og ihvertfall ikke elegant. Vi kommer dermed til det siste steget:

Steg 4: Renskriv beviset ditt slik at det er klart, tydelig, og lettlest. Beviset skal starte med antagelsen, og ende med konklusjonen. Fjern alt som er overflødig.

Et fjerde og siste forsøk kan se slik ut:

Teorem. Hvis n er et tall som er delelig med 4, så er n et partall.

Bevis. Anta at n er delelig med 4, det vil si at det finnes et heltall k slik at $n = 4k$. Da kan vi skrive $n = 2\ell$, der $\ell = 2k$. Tallet ℓ er et heltall, siden det er produktet av to heltall. Altså må n være et partall. ■

Merk at vi bruker småord og uttrykk som “anta”, “da kan vi”, “siden”, “altså”, og så videre. Selv om vi kunne brukt matematiske symboler slik som konnektiver her, gjør disse ordene det enklere for et menneske å lese teksten.

Oppgave 5.1. Les beviset på nytt om du ikke har forstått det fullt ut. Vent et par timer (eller et par dager), og prøv å bevise teoremet på egen hånd. Ta en kikk på “fasiten” ovenfor om du står fast, men gjør så mye som mulig på egen hånd.

Om du gjør denne øvelsen ofte, med forskjellige typer beviser, vil du raskt bli mye bedre i bevisføring. Etter hvert kan du også prøve å bevise teoremer *uten* å ha lest beviset på forhånd.

Her følger noen kommentarer til hvert steg.

Steg 1: Skriv tydelig hva vi antar, og hva vi vil konkludere med.

Steg 2: Fyll inn definisjonen av alle begreper.

Disse stegene er de enkleste, men også de som flest bare hopper over. Det vil bare gjøre det vanskeligste steget, steg 3, enda vanskeligere!

Steg 3: Fyll inn, steg for steg, et argument som tar deg fra antagelsen til konklusjonen.

Det finnes mange teknikker for å angripe steg 3:

- (i) Let etter sammenhenger mellom antagelsen og konklusjonen. Ser du et mønster? Skriv det ned på papiret, så blir det enklere å jobbe videre med.
- (ii) Kan du omskrive noen av uttrykkene eller begrepene slik at de ligner mer på de andre?
- (iii) Prøv å bevise en enklere variant av konklusjonen. Innsikten du da får kan du bruke til å bevise den opprinnelige konklusjonen.
- (iv) Ta for deg ett eller flere eksempler. Finn ut hvorfor konklusjonen er sann i disse enkelttilfellene. Lærer du noe som kan brukes til å bevise det generelle utsagnet?
- (v) Prøv å finne et moteksempel. Hvis utsagnet er sant, skal det jo ikke finnes moteksempler, så ved å lete etter et vil du få hint om hvorfor konklusjonen er sann.

Om du vil lese mer om disse og andre strategier kan jeg anbefale bøkene *How to Solve It* av George Pólya og *How to Prove It* av Daniel Velleman.

Steg 4: Renskriv beviset ditt slik at det er klart, tydelig, og lettlest. Beviset skal starte med antagelsen, og ende med konklusjonen. Fjern alt som er overflødig.

Dette synes nok mange er det kjedeligste steget. Men det er likevel kanskje det viktigste steget, både for leserens skyld, og din egen. Om du slurver her på en innlevering eller eksamen, vil du forvirre og frustrere leseren (sensor), og kanskje ikke overbevise hen om at du faktisk klarte å bevise teoremet. Men det er også viktig for din egen utvikling: Her har du mulighet til å komme til kjernen i argumentet, til å fjerne alt overflødig, til virkelig å forstå, å utvikle intuisjon. Ikke la denne sjansen gå fra deg!

5.2 Direkte bevis

I et *direkte bevis* starter vi med antagelsen i teoremet, og arbeider oss gradvis framover til vi har kommet fram til konklusjonen. Beviset i forrige seksjon er et eksempel på et direkte bevis. Her er et annet eksempel:

Teorem 5.2. Hvis n er et oddetall, så er også n^2 et oddetall.

Som vi vet fra Steg 2 i forrige seksjon, må vi ha alle definisjoner på plass før vi kan vise noe. Vi minner oss derfor på hva oddetall er:

Definisjon. Et tall n er et *oddetall* hvis det finnes et heltall m slik at $n = 2m + 1$.

← *oddetall*

La oss slå Steg 1 og 2 sammen:

Vi vet: n er et oddetall, det vil si at $n = 2m + 1$ for et heltall m .

Vil vise: n^2 er et oddetall, det vil si at det finnes et heltall k slik at $n^2 = 2k + 1$.

I Steg 3 fyller vi inn detaljene:

Vi vet: n er et oddetall, det vil si at $n = 2m + 1$ for et heltall m .

Vil vise: n^2 er et oddetall, det vil si at det finnes et heltall k slik at $n^2 = 2k + 1$.

- $n = 2m + 1$, så $n^2 = (2m + 1)^2 = 4m^2 + 4m + 1$.
- Kan skrive $4m^2 + 4m + 1 = 2(2m^2 + 2m) + 1$.
- Definer k som $k = 2m^2 + 2m$.
- Da er $n^2 = 2k + 1$.
- k er et heltall, siden det er en sum/produkt av heltall.
- Altså er n^2 et oddetall.

Og i Steg 4 renskriver vi argumentet:

Teorem. Hvis n er et oddetall, så er også n^2 et oddetall.

Bevis. Siden n er et oddetall kan det skrives som $n = 2m + 1$ for et heltall m . Da blir

$$n^2 = (2m + 1)^2 = 4m^2 + 4m + 1 = 2k + 1,$$

der $k = 2m^2 + 2m$. Men k er da et heltall, siden det er en sum av produkter av heltall. Altså er n^2 et oddetall. ■

Oppgave 5.2. Bevis følgende teoremer med et direkte bevis:

- (a) Hvis n er et partall, er også n^2 et partall.
- (b) La $x, y \in \mathbb{Z}$. Hvis x er et partall, er også xy et partall.
- (c) La $a, b, c \in \mathbb{Z}$. Hvis både b og c er delelig med a , er også $b + c$ delelig med a .

Her er et annet eksempel:

Teorem 5.3. En funksjon $f: A \rightarrow B$ er inverterbar hvis og bare hvis den er bijektiv.

“Hvis og bare hvis” betyr det samme som “ $\Leftrightarrow$ ”, så vi må både vise at inverterbarhet er både tilstrekkelig (“ $\Rightarrow$ ”) og nødvendig (“ $\Leftarrow$ ”) for bijektivitet. La oss begynne med tilstrekkelighet. Her er Steg 1 og 2 slått sammen:

Vi vet: f er inverterbar, altså at det finnes en $g: B \rightarrow A$ slik at $g(f(x)) = x$ for alle $x \in A$, og $f(g(y)) = y$ for alle $y \in B$.

Vil vise: $f: A \rightarrow B$ er bijektiv, altså

- om $f(x_1) = f(x_2)$, er $x_1 = x_2$ (injektiv)
- om $y \in B$ så finnes $x \in A$ slik at $f(x) = y$ (surjektiv).

Vi prøver oss på et bevis for injektivitet:

(...fortsetter fra sist)

- Anta at x_1 og x_2 er slik at $f(x_1) = f(x_2)$.
- Vet at $g(f(x)) = x$ for alle $x \in A$.
- Da blir $x_1 = g(f(x_1)) = g(f(x_2)) = x_2$. Som var det vi ville!

Det gikk jo greit! Så prøver vi surjektivitet:

(...fortsetter fra sist)

- La $y \in B$.
- Vil finne en $x \in A$ slik at $f(x) = y$.
- Vet at $g(f(x)) = x$ for alle $x \in A$, og $f(g(y)) = y$ for alle $y \in B$.
- Hvis $f(x) = y$, blir $x = g(f(x)) = g(y)$. Så det gir mening å velge $x = g(y)$.
- Da blir $y = f(g(y)) = f(x)$, som var det vi ville!

Nå er vi ferdig med Steg 3. Det gjenstår å fullføre Steg 4. (I beviset nedenfor har vi kalt inversfunksjonen for f^{-1} istedenfor g .)

Bevis for tilstrekkelighet i Teorem 5.3. Anta at f er inverterbar, med inversfunksjon $f^{-1}: B \rightarrow A$. Om $x_1, x_2 \in A$ er slik at $f(x_1) = f(x_2)$, så er $x_1 = f^{-1}(f(x_1)) = f^{-1}(f(x_2)) = x_2$, altså $x_1 = x_2$. Altså er f injektiv. Hvis $y \in B$ lar vi $x = f^{-1}(y)$, og får at $f(x) = f(f^{-1}(y)) = y$. Altså er f surjektiv. ■

Oppgave 5.3. Bevis nødvendighet i teoremet ovenfor.

Her er et annet eksempel:

Teorem 5.4. Hvis x og y er reelle, ikke-negative tall, er $xy \leq \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}y^2$.

Steg 1 og 2 kan se slik ut:

Vi vet: x, y er reelle, ikke-negative tall, altså $x, y \geq 0$.

Vil vise: $xy \leq \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}y^2$.

Hvordan går vi videre? Vi husker at andre kvadratsetning inneholder både uttrykket xy , x^2 og y^2 , så kanskje det er til hjelp?

Denne ulikheten er et spesialtilfelle av Youngs ulikhet.

(...fortsetter fra sist)

- Andre kvadratsetning:

$$(x - y)^2 = x^2 - 2xy + y^2.$$

- Vet også

$$(x - y)^2 \geq 0$$

(kvadratet er aldri negativt).

Nå nærmer vi oss et bevis. Klarer du å fullføre det?

Oppgave 5.4. Fullfør Steg 3 og 4.

5.3 Kontrapositivt bevis

Vi ønsker å bevise utsagnet $P \Rightarrow Q$, der P og Q er utsagn. I et *kontrapositivt bevis* viser vi istedet

$$\neg Q \Rightarrow \neg P,$$

altså at hvis Q ikke er sann, så er heller ikke P sann.

For å forstå hvorfor vi gjør dette, må vi tilbake til utsagnslogikken. I seksjon 4.2.4 så vi sannhetstabellen for utsagnet $P \Rightarrow Q$. Om vi legger til kolonner for utsagnene $\neg P$, $\neg Q$ og $\neg Q \Rightarrow \neg P$ får vi:

P	Q	$P \Rightarrow Q$	$\neg P$	$\neg Q$	$\neg Q \Rightarrow \neg P$
U	U	S	S	S	S
U	S	S	S	S	S
S	U	U	S	S	S
S	S	S	S	S	S

Oppgave 5.5. Fyll ut de tre siste kolonnene i sannhetstabellen ovenfor.

Om vi sammenligner kolonnene for $P \Rightarrow Q$ og $\neg Q \Rightarrow \neg P$, ser vi at de er prikk like! Med andre ord:

$$P \Rightarrow Q \text{ betyr nøyaktig det samme som } \neg Q \Rightarrow \neg P.$$

Vi illustrerer dette med et eksempel:

Teorem 5.5. La n være et heltall. Hvis n^2 er et partall, så er også n et partall.

Antagelsen P og konklusjonen Q er her

P : n^2 er et partall

Q : n et partall.

Vi får da negasjonene

$\neg P$: n^2 er et oddetall

$\neg Q$: n et oddetall.

(Heltall er enten et partall eller oddetall, men ikke begge deler, så det motsatte av å være et partall er å være et oddetall.) Steg 1 kan da se slik ut:

Vi vet (kontrapositivt): n er et oddetall.

Vil vise: n^2 er et oddetall.

Her har vi tatt med ordet “kontrapositivt”, for å informere leseren om at dette er et kontrapositivt bevis. Vi fyller ut med definisjoner i Steg 2:

Vi vet (kontrapositivt): n er et oddetall, altså at $n = 2m + 1$ for et heltall m .

Vil vise: n^2 er et oddetall, altså at $n^2 = 2k + 1$ for et heltall k .

Så prøver vi å fylle ut stegene imellom:

Vi vet (kontrapositivt): n er et oddetall, altså at $n = 2m + 1$ for et heltall m .

Vil vise: n^2 er et oddetall, altså at $n^2 = 2k + 1$ for et heltall k .

- $n = 2m + 1$, så $n^2 = (2m + 1)^2 = 4m^2 + 4m + 1$.
- $4m^2 + 4m = 2(2m^2 + 2m)$
- Derfor blir $n^2 = 2k + 1$, der $k = 2m^2 + 2m$.

Til slutt renskriver vi beviset:

Teorem. *La n være et heltall. Hvis n^2 er et partall, så er n et partall.*

Bevis. Anta kontrapositivt at n ikke er et partall. Da er $n = 2m + 1$ for et heltall m . Da får vi

$$n^2 = 4m^2 + 4m + 1 = 2k + 1$$

der $k = 2m^2 + 2m$. Men k er et heltall, så vi har vist at n^2 er et oddetall. ■

Oppgave 5.6. Skriv kontrapositive beviser for følgende teoremer:

- (a) La $n \in \mathbb{Z}$. Hvis $3n + 5$ er et oddetall, er n et partall.
- (b) La $n \in \mathbb{Z}$ og la $p \in \mathbb{N}$ være et primtall. Hvis n^2 er delelig med p , er også n delelig med p .
- (c) La $x \in \mathbb{R}$. Om $x^2 + 5x < 0$, er $x < 0$.

5.4 Motsigelsesbevis

Denne typen bevis kan brukes til å bevise et hvilket som helst utsagn, ikke bare betingede utsagn (utsagn på formen $P \Rightarrow Q$).

Vi ønsker å bevise utsagnet P . I et *motsigelsesbevis* (eller *reductio ad absurdum*) starter vi med å anta at P er *usann*, og viser at dette leder til en motsigelse. Med andre ord: Hvis $\neg P$ er absurd, må nødvendigvis P være sann.

← motsigelsesbevis

5.4.1 Et klassisk eksempel

La oss lage et motsigelsesbevis for følgende teorem:

Teorem 5.6. $\sqrt{2}$ er et irrasjonalt tall.

Vi husker fra Seksjon 2.1 at et *rasjonalt tall* er et tall som kan skrives som $\frac{p}{q}$, der p og q er heltall, så et *irrasjonalt tall* må da være et tall som *ikke* kan skrives slik. Steg 1 og 2 kan dermed se slik ut:

Vil vise: $\sqrt{2}$ er et irrasjonalt tall.

- Anta motsatt* at $\sqrt{2}$ er et rasjonalt tall, dvs. $\sqrt{2} = \frac{p}{q}$ for heltall p og q .

* Med ordet “motsatt” signaliserer vi til leseren at dette er et motsigelsesbevis. Alternativt kan du skrive “Anta for motsigelse at...”.

Kvadratrøtter er vanskelige å jobbe med, men vi vet at $\sqrt{2}^2 = 2$, så kanskje uttrykket blir lettere å jobbe med hvis vi kvadrerer og skriver om litt? Her er en forsiktig start på Steg 3:

(...fortsetter fra sist)

- Da er $2 = \frac{p^2}{q^2}$.
- Gang opp og få $p^2 = 2q^2$.

Hvordan går vi videre? Vi har funnet ut at $p^2 = 2q^2$, så p^2 må være et partall. Om vi husker tilbake til Seksjon 5.3, må da også p være et partall. Her er et nytt forsøk:

(...fortsetter fra sist)

- Siden p^2 er et partall, er også p et partall, dvs. $p = 2k$ for et heltall k .*
- Da blir $p^2 = 4k^2$.
- Altså $4k^2 = 2q^2$.
- Del på 2 og få $q^2 = 2k^2$.
- Altså er q^2 et partall, så q er også et partall.

* Merk: Her setter jeg inn definisjonen for å være et partall. Det blir lettere å gå videre når du har definisjonen på papir foran deg.

Foreløpig har vi funnet ut at hvis $\sqrt{2} = \frac{p}{q}$, så må både p og q være partall. Her kommer trikset i dette beviset: Hva om vi først fjerner felles faktorer* i brøken $\frac{p}{q}$, og så går gjennom argumentet på nytt? Om både p og q er partall har de jo fellesfaktoren 2, og vi vil ha nådd en motsigelse!

* To tall har en *felles faktor* hvis de begge er delelig på samme tall.

Her er en endelig versjon:

Teorem. $\sqrt{2}$ er et irrasjonalt tall.

Bevis. Anta motsatt at $\sqrt{2}$ er rasjonalt, det vil si $\sqrt{2} = \frac{p}{q}$ for heltall p, q . Ved å fjerne felles faktorer i brøken $\frac{p}{q}$ kan vi anta at p og q ikke har felles faktorer. Vi kvadrerer og får $2 = \frac{p^2}{q^2}$, det vil si $p^2 = 2q^2$. Altså er p^2 et partall, og da blir også p et partall, det vil si $p = 2k$ for et heltall k . Da blir

$$2q^2 = (2k)^2 = 4k^2,$$

det vil si $q^2 = 2k^2$. Altså er q^2 , og dermed også q , partall. Men da er både p og q partall, samtidig som de ikke har felles faktorer — en motsigelse! ■

5.4.2 Motsigelsesbevis for betingede utsagn

La oss si vi skal bevise et teorem på formen $P \Rightarrow Q$, og vi vil bruke et motsigelsesbevis. Fra oppgave 4.7 i Seksjon 4.2.4 husker vi at negasjonen av $P \Rightarrow Q$ er $P \wedge \neg Q$, altså at P er sann, mens Q er usann. Første steg i beviset vårt blir dermed:

- Anta både P og $\neg Q$.

Oppgave 5.7. Skriv motsigelsesbevis for følgende teoremer:

- (a) La $n \in \mathbb{Z}$. Hvis n^2 er et partall, så er også n et partall.
- (b) $\sqrt{3}$ er et irrasjonalt tall.

5.5 Induksjonsbevis

La P være et predikat som opererer på naturlige tall (slik at $P(1), P(2), P(3), \dots$ er utsagn). Vi ønsker å bevise utsagnet

$$\forall n \in \mathbb{N}, P(n),$$

altså at $P(n)$ er sant for alle naturlige tall n . Siden det finnes uendelig mange naturlige tall, vil vi ikke komme i mål om vi først beviser $P(1)$, så $P(2)$, så $P(3)$, og så videre. *Induksjonsbevis* er en teknikk som lar oss bevise alle utsagnene på én gang. Et induksjonsbevis består av to deler:

← induksjonsbevis

1. *Grunntilfellet*: Bevis $P(1)$.
2. *Induksjonssteget*: La $m \in \mathbb{N}$ være vilkårlig. Bevis $P(m) \Rightarrow P(m+1)$.

I grunntilfellet beviser vi $P(1)$, med en av de andre teknikkene vi har sett på. I induksjonssteget gjør vi en antagelse (*induksjonshypotesen*) om at $P(m)$ er sann, for én eller annen m . Vi vil da vise at også $P(m+1)$ må være sann.

← induksjonshypotese

Tanken er at siden $P(1)$ er sant (grunntilfellet), og $P(1) \Rightarrow P(2)$ er sant (induksjonssteget med $m = 1$), må også $P(2)$ være sant. Men om $P(2)$ er sant og $P(2) \Rightarrow P(3)$ er sant (induksjonssteget med $m = 2$), må også $P(3)$ være sant. Og så videre.

La oss bevise følgende formel med induksjon:

Teorem 5.7. Hvis $n \in \mathbb{N}$ er $1 + 2 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$.

Her tolker vi uttrykket $1 + 2 + \dots + n$ som summen av de n første naturlige tallene. Vi begynner med Steg 1:

Grunntilfellet: Vil vise at formelen er sann for $n = 1$.

Induksjonssteget: Anta at $m \in \mathbb{N}$ er slik at formelen er sann for $n = m$. Vil vise at den også er sann for $n = m + 1$.

Her er det ingen definisjoner å fylle ut (Steg 2), så vi går rett på Steg 3:

Grunntilfellet: Vil vise at formelen er sann for $n = 1$.

- Venstre side i formelen er bare 1. Høyre side er $\frac{1(1+1)}{2} = 1$.
- Og $1 = 1$, så formelen stemmer for $n = 1$.

Induksjonssteget: Anta at $m \in \mathbb{N}$ er slik at formelen er sann for $n = m$. Vil vise at den også er sann for $n = m + 1$.

- Antar at $1 + 2 + \dots + m = \frac{m(m+1)}{2}$.
- Vil vise $1 + 2 + \dots + (m + 1) = \frac{(m+1)(m+1+1)}{2}$.

Grunntilfellet er allerede ferdig. Vi jobber videre med induksjonssteget:

(...fortsetter fra sist)

- Vi har

$$1 + 2 + \dots + (m + 1) = (1 + 2 + \dots + m) + (m + 1).$$

- Det første leddet har vi en formel for (induksjonshypotesen), så

$$1 + 2 + \dots + (m + 1) = \frac{m(m + 1)}{2} + (m + 1).$$

- Sett på felles brøkstrek:

$$\frac{m(m + 1)}{2} + (m + 1) = \frac{m(m + 1) + 2(m + 1)}{2} = \frac{(m + 2)(m + 1)}{2}.$$

- ... som er det vi ville fram til!

En renskrevet versjon kan da se slik ut:

Teorem. Hvis $n \in \mathbb{N}$ er $1 + 2 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$.

Bevis. Vi viser først formelen for $n = 1$. Da er venstre side lik 1, mens høyre side er $\frac{1(1+1)}{2} = 1$, så formelen stemmer.

Anta så at formelen stemmer for $n = m$, for et naturlig tall m :

$$1 + 2 + \dots + m = \frac{m(m + 1)}{2}.$$

Vi ønsker å vise at

$$1 + 2 + \dots + (m + 1) = \frac{(m + 1)(m + 2)}{2}. \quad (*)$$

Om vi bruker induksjonshypotesen blir venstre side i (*)

$$\begin{aligned} 1 + 2 + \dots + (m + 1) &= (1 + 2 + \dots + m) + (m + 1) \\ &= \frac{m(m + 1)}{2} + (m + 1) \\ &= \frac{(m + 1)(m + 2)}{2}, \end{aligned}$$

som er nettopp høyre side i (*). Altså stemmer formelen for $n = m + 1$. ■

Her gir vi formelen et navn (*) for å kunne referere til den senere i beviset.

En variant av induksjonsbevis er såkalt *sterk induksjon*, der man bytter ut induksjonssteget med det følgende:

← *sterk induksjon*

2. La $m \in \mathbb{N}$ være vilkårlig. Bevis

$$P(1) \wedge P(2) \wedge \dots \wedge P(m) \Rightarrow P(m+1).$$

Induksjonshypotesen er med andre ord ikke bare at $P(m)$ er sann, men at også alle de foregående utsagnene $P(1), P(2), \dots, P(m-1)$ er sanne. I de aller fleste induksjonsbevis vil du kun trenge “svak induksjon”, men i noen få tilfeller må man bruke sterk induksjon.

Oppgave 5.8. Bruk induksjonsbevis for å bevise følgende teoremer:

- (a) For alle $n \in \mathbb{N}$ er $2^0 + \dots + 2^n = 2^{n+1} - 1$.
- (b) For alle heltall $n \geq 4$ er $2^n < n!$.

5.6 Oppsummering

- Et bevis skal være klart, tydelig og lettlest.
- Et bevis med veldig mange matematiske symboler kan være vanskelig å lese. Bruk ord og fullstendige setninger.
- En generell framgangsmåte for å bevise et utsagn er:

Steg 1: Skriv tydelig hva vi antar, og hva vi vil konkludere med.

Steg 2: Fyll inn definisjonen av alle begreper.

Steg 3: Fyll inn, steg for steg, et argument som tar deg fra antagelsen til konklusjonen.

Steg 4: Renskriv beviset ditt slik at det er klart, tydelig, og lettlest. Beviset skal starte med antagelsen, og ende med konklusjonen. Fjern alt som er overflødig.

Du må ofte hoppe flere ganger mellom Steg 2 og 3 etterhvert som nye begreper dukker opp.

- Et *direkte bevis* for utsagnet $P \Rightarrow Q$ begynner med å anta at P er sann, og jobber seg gradvis mot at også konklusjonen Q må være sann.
- Et *kontrapositivt bevis* for utsagnet $P \Rightarrow Q$ begynner med å anta at konklusjonen Q er *usann*, og viser at antagelsen P da også må være usann.
- I et *motsigelsesbevis* for utsagnet P begynner vi med å anta at P er *usann*, og viser at dette leder til en motsigelse. Siden matematikken ikke kan inneholde motsigelser, må dermed P være sann.
- I et *motsigelsesbevis* for betingede utsagn, $P \Rightarrow Q$, merker vi oss at $\neg(P \Rightarrow Q)$ er ekvivalent med $P \wedge \neg Q$, og begynner derfor med å anta at P er sann, men Q er usann, for deretter å utlede en motsigelse.
- I et induksjonsbevis for utsagn av typen $\forall n \in \mathbb{N}, P(n)$, beviser vi først utsagnet $P(1)$, og deretter utsagnet $P(m) \Rightarrow P(m+1)$ (altså at hvis m er slik at $P(m)$ er sann, så er også $P(m+1)$ sann).

5.7 Flere oppgaver

Oppgave 5.9. Bevis følgende teoremer med direkte bevis:

- (a) La $a \in \mathbb{Z}$. Om $4a$ er delelig med 7, må a være delelig med 7.
- (b) La $x \in (0, 1)$. Da er $\frac{2}{x(1-x)} \geq 1$.

Oppgave 5.10. Skriv kontrapositive beviser for følgende teoremer:

- (a) La $n \in \mathbb{Z}$. Om n^2 er delelig med 3, er også n delelig med 3.
- (b) La $x, y \in \mathbb{Z}$. Om både xy og $x + y$ er partall, er både x og y partall.
- (c) La $n \in \mathbb{N}$. Om $2^n - 1$ er et primtall, er også n et primtall.*

* Hint: Vis at dersom n er delelig med a , er $2^n - 1$ delelig med $2^a - 1$.

Oppgave 5.11. Skriv motsigelsesbevis for følgende teoremer:

- (a) Det finnes ingen $a, b \in \mathbb{Z}$ slik at $18a + 6b = 1$.
- (b) La $a, b \in \mathbb{Z}$. Da er $a^2 - 4b - 2 \neq 0$.
- (c) La $a, b, c \in \mathbb{Z}$. Hvis $a^2 + b^2 = c^2$, så er enten a eller b partall.

Oppgave 5.12. Bruk induksjonsbevis for å bevise følgende teoremer:

- (a) Om $a_0, a_1, a_2, \dots$ er fibonaccitallene*, er $a_0 + a_1 + \dots + a_n = a_{n+2} - 1$ for alle $n \in \mathbb{N}$.
- (b) For alle $n \in \mathbb{N}_0$ er $n^3 - n$ delelig med 6.
- (c) La $a_0, a_1, a_2, \dots$ være fibonaccitallene (se oppgave (a)). Da er $a_n \leq 2^n$ for alle $n \in \mathbb{N}_0$.
- (d) La $n \in \mathbb{N}$ og la A være en mengde med $\#A = n$ antall elementer. Da har A nøyaktig 2^n forskjellige delmengder*.
- (e) Vi er gitt $n \geq 2$ linjer* i planet med følgende egenskaper: Ingen av linjene er parallell med noen av de andre, og kun to linjer krysser i hvert krysningspunkt. Da deler linjene planet inn i $\frac{n^2+n+2}{2}$ regioner.

* *Fibonaccitallene* er tallene $a_0, a_1, a_2, \dots$ som er slik at $a_0 = 1, a_1 = 1$, og $a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$ for $n \geq 2$.

I oppgave (c) vil du måtte bruke sterk induksjon.

* Husk at både $\emptyset$ og A er delmengder av A

* En *linje* strekker seg uendelig langt i begge retninger; et *linjestykke* har endelig lengde.

Oppgave 5.13. Gi to beviser for følgende teorem, ett direkte bevis og ett induksjonsbevis.

For alle naturlige tall n er $n^3 - n$ delelig med 3.

Hint: I det direkte beviset bør du prøve å faktorisere $n^3 - n$.

Oppgave 5.14. Bevis følgende teorem med induksjon:

Hvis $n \in \mathbb{N}$, så er $(1 + x)^n \geq 1 + nx$ for alle $x \in \mathbb{R}$ med $x > -1$.

A MER OM KARDINALITET

I dette tilleggset utdyper vi og definerer kardinalitetsbegrepet vi møtte på i Seksjon 2.3. For å forstå denne seksjonen må du først lese Kapittel 2 og 3. Stoffet her er ikke en del av pensum i MAT1105.

I Seksjon 2.3 definerte vi *kardinaliteten* $\#A$ til en mengde A til å være antall elementer i A . Symbolet $\#$ er altså et mål på størrelsen av en mengde. Dette er vel og greit når A er en endelig mengde, men hva med uendelig store mengder? Et av 1800-tallsmatematikens store gjennombrudd var å gi en rigorøs definisjon av kardinaliteten til *enhver* mengde, og dermed innse at det finnes *forskjellige uendeligheter*.

Til å begynne med definerer vi kardinaliteten bare indirekte: Hvis A og B er mengder, skriver vi

$$\#A \leq \#B$$

(“kardinaliteten til A er mindre enn, eller lik, kardinaliteten til B ”) dersom det finnes en injektiv funksjon $f: A \rightarrow B$. Merk at vi ikke sier noe som helst om hva kardinaliteten egentlig *er* — foreløpig er uttrykket “ $\#A \leq \#B$ ” bare en samling med symboler.

Eksempel A.1. La $A = \{1, 2\}$ og $B = \{6, 8, 9\}$. Da er $\#A \leq \#B$, siden vi for eksempel kan la $f: A \rightarrow B$ være funksjonen

$$f(1) = 6, \quad f(2) = 8.$$

Da er f veldefinert, siden $f(x)$ har én, og bare én, verdi for alle $x \in A$, og alle verdiene ligger i B . Videre er f injektiv, siden f ikke tar samme verdi for to forskjellige objekter i A . På den annen side kan vi ikke si at $\#B \leq \#A$, siden enhver funksjon $g: B \rightarrow A$ nødvendigvis må ta samme verdi (minst) to ganger. $\square$

Oppgave A.1. Vis at hvis $A \subseteq B$ så er $\#A \leq \#B$.

For å komme oss videre må vi vite hva en ekvivalensrelasjon er.

Definisjon A.2. En *ekvivalensrelasjon* på en mengde X er en operasjon $\sim$ som tilfredsstiller for alle $x, y, z \in X$:

refleksivitet: $x \sim x$

symmetri: hvis $x \sim y$ så er også $y \sim x$

transitivitet: hvis $x \sim y$ og $y \sim z$, så er $x \sim z$.

Uttrykket $x \sim y$ uttales “ x er ekvivalent med y ”.

Definisjon A.3. La $\sim$ være en ekvivalensrelasjon på X . For en $x \in X$ lar vi *ekvivalensklassen* til x være mengden $[x]$ definert ved

$$[x] = \{y \in X : x \sim y\}.$$

Den største pioneren innen dette feltet var den russisk-tyske matematikeren Georg Cantor (1845–1918).

Det finnes mange forskjellige mulige valg for f . Kan du finne alle?

← *ekvivalensrelasjon*

Med språket fra Seksjon 4.1 kan vi si at $\sim$ er et predikat som avhenger av to variabler i X .

← *ekvivalensklassen*

Oppgave A.2. Forklar hvorfor symbolet $=$ er en ekvivalensrelasjon på en hvilken som helst mengde X . Forklar også hvorfor ekvivalensklassen til enhver $x \in X$ blir mengden $\{x\}$.

Vi danner nå samlingen X bestående av alle mengder, og definerer en ekvivalensrelasjon på X ved å si at hvis $A, B \in X$ (det vil si, A og B er mengder) så er

$$A \sim B \quad \text{dersom både } \#A \leq \#B \text{ og } \#B \leq \#A.$$

La oss sjekke at $\sim$ er en ekvivalensrelasjon.

refleksivitet: Vi vil vise at $A \sim A$ for alle mengder A . Sjekker vi definisjonen, må vi finne en injektiv funksjon $f: A \rightarrow A$. Om vi lar f være identitetsfunksjonen $f(x) = x$ for $x \in A$, ser vi at denne oppfyller kravene.

symmetri: Anta at $A \sim B$, så det finnes to injektive funksjoner $f: A \rightarrow B$ og $g: B \rightarrow A$. Men dette betyr akkurat det samme som $B \sim A$.

transitivitet: Anta at $A \sim B$ og at $B \sim C$. Da finnes injektive funksjoner $f_1: A \rightarrow B$, $g_1: B \rightarrow A$, $f_2: B \rightarrow C$, og $g_2: C \rightarrow B$. Lag nå funksjonene $f = f_2 \circ f_1: A \rightarrow C$ og $g = g_1 \circ g_2: C \rightarrow A$. Som vi så i Oppgave 3.10, er komposisjonen mellom injektive funksjoner også injektive, så vi har vist at $A \sim C$.

Vi kan nå endelig definere *kardinaliteten* til en mengde A som

← kardinalitet

$$\#A = [A],$$

det vil si ekvivalensklassen til A med hensyn på ekvivalensrelasjonen $\sim$. Men hva har egentlig alt dette med størrelsen på en mengde å gjøre? Vel, vi kan si at alle de fire mengdene

$$\{1, 2, 3\}, \quad \{2, 4, 8\}, \quad \{\text{eple, pære, banan}\}, \quad \{\clubsuit, \diamond, \heartsuit\}$$

er ekvivalente med hensyn på ekvivalensrelasjonen $\sim$, og dermed har samme kardinalitet. Du kan se dette enten ved å finne injektive funksjoner mellom mengdene, eller ved den enkle observasjonen at *alle mengdene har tre elementer*. Mer generelt kan vi si at en mengde A inneholder n elementer (der $n \in \mathbb{N}$) hvis

$$\#A = \#\{1, 2, 3, \dots, n\}.$$

Litt uformelt kan vi da si at kardinaliteten til A er n . Dette er jo strengt tatt ikke sant: Vi har definert $\#A$ til å være ekvivalensklassen $[A]$, som jo er noe annet enn tallet n . Men de to objektene $[A]$ og n representerer samme informasjon: Hvis vi vet n , kan vi danne ekvivalensklassen $\#\{1, 2, \dots, n\}$ (som jo er den samme som $[A]$), og motsatt, hvis vi vet $[A]$, kan vi lete gjennom heltallene til vi finner en n slik at $\#\{1, 2, \dots, n\} = [A]$. Denne ideen — at to forskjellige objekter representerer den samme informasjonen, og dermed kan tenkes på som ett og samme objekt — vil du møte mange steder i matematikken.

Det nye kardinalitetsbegrepet vårt kan også brukes på uendelig store mengder. Vi kan for eksempel se at

$$\#\mathbb{N} \leq \#\mathbb{Z},$$

siden $\mathbb{N} \subseteq \mathbb{Z}$ (se Oppgave A.1). Litt vanskeligere er det å se at

$$\#\mathbb{Z} \leq \#\mathbb{N},$$

men om vi velger for eksempel g som i tabellen

x	0	1	-1	2	-2	3	-3	...
$g(x)$	1	2	3	4	5	6	7	...

så er faktisk g en veldefinert, injektiv funksjon. Dermed har vi vist at $\#\mathbb{N} = \#\mathbb{Z}$ — det finnes “like mange” naturlige tall som det finnes heltall! Mer generelt sier vi at en mengde A er *tellbar* hvis $\#A = \#\mathbb{N}$. Vi har altså vist at $\mathbb{Z}$ er tellbar.

Lemma A.4. En mengde A er tellbar hvis og bare hvis elementene i A kan skrives som en liste,

$$A = \{x_1, x_2, \dots\}$$

for ulike $x_1, x_2, \dots \in A$.

Bevis. Hvis A er tellbar finnes det en injektiv funksjon $f: A \rightarrow \mathbb{N}$. Betrakt mengden $B = \{f(x) : x \in A\}$, som er en delmengde av $\mathbb{N}$. Vi definerer nå $x_1, x_2, \dots \in A$ slik: La x_1 være det elementet i A som er slik at $f(x_1)$ er det minste elementet i B . Siden f er injektiv, finnes det bare ett slikt element. La så x_2 være slik at $f(x_2)$ er det nest minste elementet i B . Og så videre. Ved å fortsette slik får vi en liste med *ulike* $x_1, x_2, \dots \in A$, og listen vil inneholde alle elementer i A , siden vi for enhver $x \in A$ før eller siden vil komme til tallet $f(x)$. Dette beviser “og bare hvis”-delen.

Anta så at A kan skrives som listen $\{x_1, x_2, \dots\}$ for ulike $x_1, x_2, \dots \in A$. Da vil funksjonen $g(n) = x_n$ være en injektiv funksjon fra $\mathbb{N}$ til A . Motsatt lar vi $f: A \rightarrow \mathbb{N}$ være den injektive funksjonen $f(x) = n$, der $n \in \mathbb{N}$ er slik at $x = x_n$. Dette beviser “hvis”-delen. ■

Til slutt kommer vi tilbake til det vi nevnte i innledningen, at det finnes flere forskjellige uendeligheter. Mengdene $\mathbb{N}$ og $\mathbb{R}$ er begge uendelig store, og siden $\mathbb{N} \subseteq \mathbb{R}$, må $\#\mathbb{N} \leq \#\mathbb{R}$. Men det motsatte er ikke tilfellet:

Teorem A.5. $\mathbb{R}$ er ikke tellbar.

Bevis. Vi beviser påstanden med et motsigelsesbevis. Anta motsatt at $\mathbb{R}$ er tellbar. Ifølge lemmaet over kan vi da skrive $\mathbb{R}$ som en liste,

$$\mathbb{R} = \{x_1, x_2, \dots\}$$

for ulike tall $x_1, x_2, \dots \in \mathbb{R}$. Vårt mål vil være å vise at det må finnes et tall $x \in \mathbb{R}$ som *ikke* opptrer i denne listen, og det vil være en motsigelse (for listen skal jo inneholde hele $\mathbb{R}$).

Hvert av tallene x_n er et reelt tall, så det kan skrives som et desimaltall:

$$x_n = u \cdots s_n^2 s_n^1 s_n^0 \cdot s_n^{-1} s_n^{-2} \cdots$$

hvor u er fortegnet til x_n (enten $+1$ eller -1) og $s_n^m \in \{0, 1, 2, \dots, 9\}$ er det m -te sifferet i dette desimaltallet (der $m \in \mathbb{Z}$). La oss nå definere et nytt tall x med desimalekspansjon

$$x = 0.s^{-1}s^{-2} \cdots$$

der vi velger sifrene $s^{-1}, s^{-2}, \dots$ som

$$s^{-n} = \begin{cases} 6 & \text{hvis } s_n^{-n} \in \{1, 2, 3, 4, 5\} \\ 4 & \text{hvis } s_n^{-n} \in \{6, 7, 8, 9, 0\} \end{cases} \quad (\text{for } n = 1, 2, 3, \dots).$$

Merk at $s_n^{-n} \neq s^{-n}$ for alle n . Vi påstår nå at x ikke opptrer i listen $x_1, x_2, \dots$. Velg et vilkårlig element x_n fra denne listen. Da er s_n^{-n} det n -te sifferet etter komma i tallet x_n , som altså er ulikt det n -te sifferet s^{-n} i x . Altså er $x_n \neq x$. Dette argumentet gjelder for enhver x_n i listen vår, så vi har vist at x ikke opptrer i listen. ■

← tellbar

Noen steder vil du finne definisjonen $\#A \leq \#\mathbb{N}$ for tellbarhet. Dermed blir også endelige mengder tellbare.

Dette argumentet ble oppfunnet av Georg Cantor, og kalles i dag *Cantors diagonalargument*.

Her er det ikke viktig at man velger akkurat sifrene 4 og 6; det viktige er at vi får egenskapen $s_n^{-n} \neq s^{-n}$. Vi holder oss også unna sifrene 0 og 9, fordi desimaltall som ender med uendelig mange 0-er eller 9-ere har to forskjellige desimalekspansjoner: $0,999\dots = 1,000\dots$

B HVA ER “EGENTLIG” EN FUNKSJON?

I dette tillegget utdyper vi og definerer funksjonsbegrepet fra Kapittel 3. Stoffet her er ikke en del av pensum i MAT1105.

I Seksjon 3.1 definerte vi begrepet “funksjon” som en operasjon fra én mengde til en annen. Men dette kan høres ut som en sirkeldefinisjon, for hva er en “operasjon”? Det viser seg at vi kan definere funksjonsbegrepet fullstendig rigorøst ved hjelp av kartesiske produkter (se Seksjon 2.5).

Definisjon (Mengdeteoretisk definisjon av funksjoner). La A og B være mengder. En funksjon fra A til B er en mengde $F \subseteq A \times B$ som er slik at det for enhver $x \in A$ finnes én, og bare én, $y \in B$ slik at $(x, y) \in F$.

← funksjon

Elementet $y \in B$ nevnt i definisjonen kaller vi gjerne “ $F(x)$ ”. Denne notasjonen gir mening, for ifølge definisjonen har “ $F(x)$ ” en verdi, og bare én verdi, uansett hvilken $x \in A$ vi velger.

Vi kan bytte mellom disse to synspunktene som det passer oss. Om f er en funksjon i “vanlig” forstand, slik som i Seksjon 3.1, kan vi definere grafen til f som

← graf

$$\{(x, f(x)) : x \in A\}.$$

Oppgave B.1. Sjekk at grafen til en funksjon stemmer overens med den mengdeteoretiske definisjonen av en funksjon.

Det er ikke ofte vi behøver å tenke på funksjoner som delmengder av $A \times B$, men iblant er det nyttig: For eksempel kan vi definere kontinuitet av en funksjon $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ som å si at grafen til f er en lukket delmengde av $\mathbb{R}^2$. (Begrepene *kontinuerlig* og *lukket* lærer du senere i studiene.)

Oppgave B.2. Svarer følgende delmengder av $\mathbb{R}^2$ til grafen til en funksjon? Isåfall, hvilken funksjon?

(a) $F = \{(x, x^2) : x \in \mathbb{R}\}$

(b) $G = \{(0, x) : x \in \mathbb{R}\}$

(c) $H = \{(x, 0) : x \in \mathbb{R}\}$

C LØSNING PÅ ENKELTE OPPGAVER

Kapittel 2

Løsning på oppgave 2.1. Anta at $b < a$. Vi har

$$(a, b) = \{x \in \mathbb{R} : x > a \text{ og } x < b\}.$$

Men om $b < a$, finnes det ingen $x \in \mathbb{R}$ som både er større enn a og mindre enn b . Altså er $(a, b) = \emptyset$.

Løsning på oppgave 2.2. Som en liste:

$$P = \{2, 4, 6, 8, \dots\}$$

og med mengdebyggenotasjon:

$$P = \{2n : n \in \mathbb{N}\}.$$

Løsning på oppgave 2.3. Vi må bevise at hvis $x \in A$, så er også $x \in B$. Hvis $x \in A$, så er $x > 4$. Mengden B inneholder alle ikke-negative reelle tall. Men siden $x > 4$, er x ikke-negativt, så da vil også $x \in B$. Altså er $A \subseteq B$.

Løsning på oppgave 2.4. Anta at både $A \subseteq B$ og $B \subseteq A$. Da vil alle elementer i én av mengdene, også ligge i den andre mengden. Altså inneholder A og B akkurat de samme objektene, så $A = B$.

Anta motsatt at $A = B$. Spesielt vil da alle objektene i A også ligge i B , så $A \subseteq B$. På samme måte ser vi at $B \subseteq A$.

Løsning på oppgave 2.5. Vi viser først at $A \subseteq B$, altså at alle elementene i A også ligger i B . Det holder å observere at 1 ligger i B , 2 ligger i B , og 3 ligger i B . Dermed har vi vist at $A \subseteq B$.

Vi viser så at $B \subseteq A$. Vi observerer at 3 ligger i A , 1 ligger i A , 1 ligger i A , og 2 ligger i A . Altså er $B \subseteq A$. Vi har dermed vist at $A = B$.

Løsning på oppgave 2.6.

- (a) Sann, for B inneholder også 1 og 2.
- (b) Sann, for B inneholder objektet $\{1, 2\}$, som er nettopp A .
- (c) Usann, for A inneholder ikke objektet $\{1, 2\}$.
- (d) Usann.

Løsning på oppgave 2.7.

- (a) Siden $\emptyset$ inneholder 0 objekter, må $\#\emptyset = 0$.
- (b) $\{8, 10, 3, 5\}$ inneholder fire objekter.

- (c) $\{2, 5, 2, 9, 5\}$ er det samme som $\{2, 5, 9\}$, som inneholder tre objekter. Kardinaliteten er altså tre.
- (d) Det finnes 10 partall som er mindre enn eller lik 20, så kardinaliteten er 10.
- (e) Det finnes uendelig mange negative heltall, så kardinaliteten er ∞ .

Løsning på oppgave 2.8. Det beste vi kan si er at $\#A$ er minst 1, og høyst 4. Hvis alle tallene er ulike, er $\#A = 4$, mens hvis alle tallene er like er $\#A = 1$. Andre varianter vil kunne gi $\#A = 2$ eller $\#A = 3$.

Løsning på oppgave 2.9.

$$A \cup B = \{x \in \mathbb{R} : x > 4 \text{ eller } x < 9\} = \mathbb{R}$$

(siden ethvert tall er enten større enn 4 eller mindre enn 9).

$$A \cap B = \{x \in \mathbb{R} : x > 4 \text{ og } x < 9\} = (4, 9).$$

$$A \setminus B = \{x \in \mathbb{R} : x > 4 \text{ men ikke } x < 9\} = [9, \infty)$$

Løsning på oppgave 2.10.

- (a) Objektene som ligger i både A og B , er nøyaktig de samme som de som ligger i både B og A .
- (b) Objektene som ligger i enten A eller B , er nøyaktig de samme som de som ligger i enten B eller A .
- (c) $A \cap B$ er mengden av alle objekter som ligger i både A og B , så spesielt ligger de også i A . Altså er $A \cap B \subseteq A$.
- (d) Alle elementer i A som ikke ligger i B , må ligge i A . Altså er $A \setminus B \subseteq A$.
- (e) Alle objekter i A ligger også enten i A eller B .

Løsning på oppgave 2.11. Etvert objekt x ligger enten i A , eller utenfor A . Vi har

$$(A^c)^c = \{x : x \notin A^c\},$$

og A^c er nettopp mengden av elementer utenfor A , så

$$(A^c)^c = \{x : x \notin A^c\} = A.$$

Løsning på oppgave 2.12. Som nevnt i Seksjon 2.4, er det ingen entydig måte å velge universet på. Svaret vil derfor avhenge av hva du velger som univers.

- (a) Siden A er en mengde av reelle tall lar vi universet være $\mathbb{R}$. Vi får da

$$A^c = \mathbb{R} \setminus A = \{x \in \mathbb{R} : x \notin (3, \infty)\} = \{x \in \mathbb{R} : x \leq 3\} = (-\infty, 3].$$

- (b) Siden B er en mengde av naturlige tall, lar vi universet være $\mathbb{N}$. Vi får da

$$B^c = \mathbb{N} \setminus B = \{n \in \mathbb{N} : n \notin \{2, 4, 6, 8, \dots\}\} = \{1, 3, 5, 7, \dots\},$$

mengden av positive oddetall.

(c) Siden $C = \mathbb{Q} \subseteq \mathbb{R}$ kan vi la universet være $\mathbb{R}$. Da blir

$$C^c = \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} = \{\text{irrasjonelle tall}\}.$$

Løsning på oppgave 2.15. Det er flere forskjeller mellom n -tupplet A og mengden B :

1. De er to forskjellige typer matematiske objekter — n -tupler og mengder.
2. A har en innebygd rekkefølge på elementene sine, men det har ikke B . Vi kan for eksempel stokke om og si at $B = \{x_n, x_{n-1}, \dots, x_2, x_1\}$, men $A \neq (x_n, x_{n-1}, \dots, x_2, x_1)$.
3. n -tupplet A har nøyaktig n komponenter, mens B har n elementer, *eller færre* (hvis noen av tallene $x_1, x_2, \dots, x_n$ er like.)

Løsning på oppgave 2.19. Utsagnet $\emptyset \subseteq A$ er sant for alle mengder A ! La A være en mengde. For å vise at $\emptyset \subseteq A$ må vi sjekke om $x \in A$ for alle $x \in \emptyset$. Og det stemmer jo at når $x \in \emptyset$, så er $x \in A$ — det skjer riktignok aldri at $x \in \emptyset$, men utsagnet er likevel sant.

Du synes kanskje dette argumentet er lurei, og det er overhodet ikke opplagt at det skal være slik. På samme måte kunne vi jo argumentert for at utsagnet “alle mennesker som kan fly har lilla tenner” er sant. (Ingen mennesker kan fly, så utsagnet er automatisk sant.) Dersom vi heller skulle definert dette utsagnet til å være *usant*, ville det få uheldige konsekvenser: Som du får se i Kapittel 4, kunne vi da konkludere at det må finnes minst ett menneske som kan fly, men som ikke har lilla tenner. Og det er jo bare tull.

Kapittel 3

Løsning på oppgave 3.1. Ut fra definisjonen av en funksjon $f: A \rightarrow B$, er $f(x)$ alltid et objekt i B , uansett $x \in A$. Dermed må alle punkter i V_f også ligge i B . Hvis vi for eksempel definerer $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ som $f(x) = x^2$, vil verdimrådet være $\mathbb{R}$, mens verdimengden er $[0, \infty)$, som er en mindre mengde.

Løsning på oppgave 3.6. Vi lar $f: A \rightarrow B$ være en funksjon, og vi lar $V_f = \{f(x) : x \in A\}$ være verdimengden. Vi vet fra før at $V_f \subseteq B$. Hvis f er slik at det for enhver $y \in B$ finnes en $x \in A$ slik at $f(x) = y$, betyr dette at alle $y \in B$ også ligger i V_f . Altså må $V_f = B$.

Motsatt, hvis f er slik at $V_f = B$, så vet vi at alle $y \in B$ også ligger i V_f . Men V_f består utelukkende av objekter på formen $f(x)$ for en $x \in A$. Altså må enhver $y \in B$ kunne skrives som $f(x)$, for en $x \in A$.

Løsning på oppgave 3.7. Om vi lar $f, g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ være $f(x) = x^2$ og $g(x) = \cos(x)$ for $x \in \mathbb{R}$, kan vi skrive $h = g \circ f$.

Løsning på oppgave 3.10. Anta at $f: A \rightarrow B$ og $g: B \rightarrow C$ er injektive. Hvis $x_1, x_2 \in A$ er slik at $x_1 \neq x_2$, så er også $f(x_1) \neq f(x_2)$, siden f er injektiv. Men da er også $g(f(x_1)) \neq g(f(x_2))$, siden g er injektiv. Med andre ord er $g \circ f(x_1) \neq g \circ f(x_2)$. Altså er $g \circ f$ injektiv.

Anta nå at $f: A \rightarrow B$ og $g: B \rightarrow C$ er surjektive. Siden g er surjektiv, finnes det for enhver $z \in C$ en $y \in B$ slik at $g(y) = z$. Siden f er surjektiv finnes det en $x \in A$ slik at $f(x) = y$. Da er

$$g \circ f(x) = g(f(x)) = g(y) = z.$$

Altså er $g \circ f$ surjektiv.

Løsning på oppgave 3.11. Betingelsene for at $g: B \rightarrow A$ er inversfunksjonen til $f: A \rightarrow B$ kan skrives som

$$g \circ f = \text{id}_A \quad \text{og} \quad f \circ g = \text{id}_B.$$

Løsning på oppgave 3.12. Om du begynner med 1000 kroner på kontoen, og har en rente på 5% i året, kan vi sette $f(t) = 1000 \cdot 1.05^t$, der t er antall år siden du satt inn pengene. For å finne f^{-1} løser vi ligningen $f(t) = x$ for t , der x er et vilkårlig tall. Vi får da

$$1000 \cdot 1.05^t = x,$$

som er det samme som

$$1.05^t = \frac{x}{1000}.$$

Etter å ta logaritmen på begge sider og dele på $\log 1.05$ får vi

$$t = \frac{\log(x/1000)}{\log 1.05}.$$

Altså er

$$f^{-1}(x) = \frac{\log(x/1000)}{\log 1.05}.$$

Kapittel 4

Løsning på oppgave 4.1.

- (a) Sant utsagn.
- (b) Sant utsagn.
- (c) Utsagn, men uvisst om det er sant eller ikke. (Her antar vi at begrepene “liv” og “planet” har utvetydige definisjoner, noe som absolutt ikke er opplagt.)
- (d) Predikat — setningen er enten sann eller usann så lenge x er et tall (men sannheten avhenger av verdien av x).
- (e) Hverken utsagn eller predikat. Begrepet “blå-grønn” er ikke definert for mengder, så det gir ikke mening å si at setningen er sann eller ei.
- (f) Usant utsagn.
- (g) Predikat som avhenger av verdien av f . Dette er et litt vanskelig eksempel; setningen ser ut som en definisjon av en funksjon f . Om vi skal tolke setningen som et utsagn, er setningen sann hvis vi tidligere har definert f som kvadratfunksjonen, og usann hvis f er en annen funksjon.
- (h) Usant utsagn.
- (i) Vanskelig å si! Om vi spesifiserer *hvem* som synes utsagnslogikk er gøy, kan vi kalle setningen et utsagn, men her avhenger sannheten av hvem som leser setningen. Jeg vil derfor si at setningen er for upresis til å kalles et utsagn eller predikat.
- (j) Denne setningen er tvetydig. Vi kan tolke den som predikatet

$$P(n): n > 8,$$

der variablen n kun kan velges blant de naturlige tallene, eller vi kan tolke det som et utsagn. Som et utsagn er det usant: Det påstår å si noe om alle naturlige tall, men påstanden er feil (det stemmer ikke for tallene $n = 1, 2, \dots, 8$).

(k) Sant utsagn (men det er ikke opplagt hvorfor det finnes uendelig mange primtall).

(l) Usant utsagn.

(m) Utsagn. Dette er *tvillingprimtallformodningen* (eller *twin prime conjecture*), og i skrivende stund vet ingen om det er sant eller ikke.

Løsning på oppgave 4.2. Vi lager en sannhetstabell med kolonnene P , $\neg P$ og $\neg(\neg P)$:

P	$\neg P$	$\neg(\neg P)$
U	S	U
S	U	S

Om vi sammenligner første og tredje kolonne, ser vi at de er helt like. Altså må utsagnene P og $\neg(\neg P)$ bety det samme.

Løsning på oppgave 4.3.

(a) Negasjonen av $x \leq 5$ er $x > 5$.

(b) Negasjonen av $n \in \mathbb{Q}$ er $n \notin \mathbb{Q}$.

(c) Negasjonen av $2 + 2 = 5$ er $2 + 2 \neq 5$.

(d) Negasjonen av $A = \emptyset$ er $A \neq \emptyset$. (Dette er det samme som å si at A er en mengde som inneholder minst ett element.)

Løsning på oppgave 4.4. Kun (f) uttrykker $\neg P$. Utsagnet $A \subseteq B$ betyr "for alle $x \in A$, er også $x \in B$ ". Dette utsagnet er usant nettopp hvis det finnes minst én $x \in A$ som ikke ligger i B . Kun (f) uttrykker dette.

Løsning på oppgave 4.5. En sannhetstabell med kolonnene P , Q , R , $P \vee Q$, $Q \vee R$, $(P \vee Q) \vee R$ og $P \vee (Q \vee R)$ ser slik ut:

P	Q	R	$P \vee Q$	$Q \vee R$	$(P \vee Q) \vee R$	$P \vee (Q \vee R)$
U	U	U	U	U	U	U
U	S	U	S	S	S	S
S	U	U	S	U	S	S
S	S	U	S	S	S	S
U	U	S	U	S	S	S
U	S	S	S	S	S	S
S	U	S	S	S	S	S
S	S	S	S	S	S	S

Vi ser at de to siste kolonnene er prikk like. Altså er utsagnene $(P \vee Q) \vee R$ og $P \vee (Q \vee R)$ ekvivalente.

Løsning på oppgave 4.6. En sannhetstabell med kolonnene P , Q , R , $P \wedge Q$, $Q \vee R$, $(P \wedge Q) \vee R$ og $P \wedge (Q \vee R)$ ser slik ut:

P	Q	R	$P \wedge Q$	$Q \vee R$	$(P \wedge Q) \vee R$	$P \wedge (Q \vee R)$
U	U	U	U	U	U	U
U	S	U	U	S	U	U
S	U	U	U	U	U	U
S	S	U	S	S	S	S
U	U	S	U	S	S	U
U	S	S	U	S	S	U
S	U	S	U	S	S	S
S	S	S	S	S	S	S

Vi ser at de to siste kolonnene er ulike i rad 5 og 6. Altså er utsagnene $(P \wedge Q) \vee R$ og $P \wedge (Q \vee R)$ ikke ekvivalente.

Løsning på oppgave 4.7.

P	Q	$P \Rightarrow Q$	$P \wedge \neg Q$
U	U	S	U
U	S	S	U
S	U	U	S
S	S	S	U

Vi ser at fjerde kolonne er negasjonen av tredje kolonne. Altså er $\neg(P \Rightarrow Q)$ ekvivalent med $P \wedge \neg Q$.

Løsning på oppgave 4.8. La P stå for utsagnet $2x - 3 = 5$, og la Q stå for utsagnet $x = 4$. Vi må sjekke at dersom P er sann, er også Q sann, og motsatt. Anta derfor at P er sann. Da er $2x = 5 + 3 = 8$, og deler vi med 2 får vi $x = 4$, altså Q . Motsatt, om Q er sann, er $2x - 3 = 2 \cdot 4 - 3 = 5$, så P er også sann. Dermed er $P \Leftrightarrow Q$.

Løsning på oppgave 4.9. Vi lager en sannhetstabell med kolonnene P , Q , $P \Rightarrow Q$, $Q \Rightarrow P$, $(P \Rightarrow Q) \wedge (Q \Rightarrow P)$ og $P \Leftrightarrow Q$:

P	Q	$P \Rightarrow Q$	$Q \Rightarrow P$	$(P \Rightarrow Q) \wedge (Q \Rightarrow P)$	$P \Leftrightarrow Q$
U	U	S	S	S	S
U	S	S	U	U	U
S	U	U	S	U	U
S	S	S	S	S	S

Vi ser at de to siste kolonnene er prikk like, så disse to utsagnene er ekvivalente.

Løsning på oppgave 4.10. Utsagnet $\neg(P \wedge Q) \Leftrightarrow \neg P \vee \neg Q$ kan uttales “det motsatte av at både P og Q er sanne, er at enten P eller Q er usann”.

Løsning på oppgave 4.11. Vi bruker De Morgan i flere steg:

$$\begin{aligned}
\neg((\neg P \vee Q) \wedge (\neg Q \vee R)) &\Leftrightarrow \neg(\neg P \vee Q) \vee \neg(\neg Q \vee R) \\
&\Leftrightarrow (\neg(\neg P) \wedge \neg Q) \vee (\neg(\neg Q) \wedge \neg R) \\
&\Leftrightarrow (P \wedge \neg Q) \vee (Q \wedge \neg R).
\end{aligned}$$

Vi kan uttale dette som at “enten er P sann og Q usann, eller så er Q sann og R usann”. (Merk at begge utsagnene kan ikke være sanne samtidig, for da måtte Q vært både usann og sann.)

Løsning på oppgave 4.12. Utsagnet “alle elementer i A er større enn 8” kan skrives som

$$\forall n \in A, n > 8.$$

Løsning på oppgave 4.13.

(a) $\forall n \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N}$.

Dette er ikke sant, fordi for eksempel $-1 \in \mathbb{Z}$ men $-1 \notin \mathbb{N}$.

(b) $\forall x \in \mathbb{R}, \exists y \in \mathbb{N}, y > x$.

Dette er sant: La for eksempel y være $x + 1$, rundet opp til nærmeste heltall.

(c) $\forall a \in \mathbb{N}, \forall b \in \mathbb{N}, \exists c \in \mathbb{N}, a^2 + b^2 = c^2$.

Dette er ikke sant: la for eksempel $a = b = 1$, slik at $a^2 + b^2 = 2$. Det finnes ingen $c \in \mathbb{N}$ slik at $c^2 = 2$.

(d) $\forall x \in \mathbb{R}, \exists y \in \mathbb{R}, \sqrt{y} = x$.

Dette er ikke sant: kvadratrøtter av reelle tall er aldri negative, så bare la x være negativ.

Løsning på oppgave 4.14.

(a) $\neg P_2 \Leftrightarrow$ Det finnes en sau som ikke har hvit ull.

(b) Vi begynner med å stykke opp utsagnet:

$$P_2 \Leftrightarrow \exists \text{ menneske } m, m \text{ liker ikke is til dessert.}$$

La oss så anta at alle mennesker enten liker is, eller ikke liker is, slik at

$$\neg(m \text{ liker ikke is til dessert}) \Leftrightarrow m \text{ liker is til dessert.}$$

Vi får da at

$$\neg P_2 \Leftrightarrow \forall \text{ mennesker } m, m \text{ liker is til dessert,}$$

eller sagt på en annen måte,

$$\neg P_2 \Leftrightarrow \text{alle mennesker liker is til dessert.}$$

(c) Vi tolker utsagnet slik: I løpet av enhver dag som har gått, var det minst én tidsperiode da det regnet i Bergen. Det motsatte av dette må være at det har vært minst én dag i historien da det *ikke* var minst én tidsperiode da det regnet i Bergen. Dette siste er det samme som at det ikke regnet overhodet i løpet av den dagen. Altså:

$$\neg P_3 \Leftrightarrow \text{det har vært minst én dag da det ikke regnet i Bergen.}$$

(d) Vi tolker her “en romersk mynt” som “minst én romersk mynt”. Negasjonen blir da

$$\neg P_4 \Leftrightarrow \text{minst én myntsamler har ingen romersk mynt i samlingen.}$$

Om vi tolket “en romersk mynt” som “én romersk mynt”, ville negasjonen blitt

$$\neg P_4 \Leftrightarrow \text{minst én myntsamler har enten ingen, eller flere enn én, romersk mynt i samlingen.}$$

En annen tolkning ville vært “Til enhver tid regner det i Bergen”. En tredje tolkning ville vært “Hvert eneste år regner det minst én gang hver dag”.

(e) La P være predikatet

$P(s)$: s har blondt hår.

La S være mengden bestående av alle svensker. Da sier P_5 at

$$P_5: (\exists s \in S, P(s)) \wedge (\exists s \in S, \neg P(s)).$$

Om vi bruker De Morgans første lov finner vi at det motsatte av P_5 er

$$\neg P_5 \Leftrightarrow \neg(\exists s \in S, P(s)) \vee \neg(\exists s \in S, \neg P(s)).$$

Vi bruker så regelen for å finne negasjonen av kvantorer og får

$$\neg P_5 \Leftrightarrow (\forall s \in S, \neg P(s)) \vee (\forall s \in S, P(s)).$$

Sagt med ord har vi da funnet at

$$\neg P_5 \Leftrightarrow \text{enten har ingen svensker blondt hår, eller så har alle det.}$$

Løsning på oppgave 4.15. Vi setter opp en sannhetstabell med kolonnene P , Q , $\neg P$, $\neg Q$, $P \Rightarrow Q$, $P \Rightarrow \neg Q$, $\neg P \Rightarrow \neg Q$, $(P \Rightarrow Q) \wedge (\neg P \Rightarrow \neg Q)$ og $P \Leftrightarrow Q$:

P	$\neg P$	Q	$\neg Q$	$P \Rightarrow Q$	$\neg P \Rightarrow \neg Q$	$(P \Rightarrow Q) \wedge (\neg P \Rightarrow \neg Q)$	$P \Leftrightarrow Q$
U	S	U	S	S	S	S	S
U	S	S	U	S	U	U	U
S	U	U	S	U	S	U	U
S	U	S	U	S	S	S	S

Som vi ser av de to siste kolonnene, er utsagnene $P \Leftrightarrow Q$ og $(P \Rightarrow Q) \wedge (\neg P \Rightarrow \neg Q)$ ekvivalente.

Kapittel 5

Løsning på oppgave 5.2. Her er fullstendige bevis av hvert teorem:

- (a) Om n er et partall finnes en $k \in \mathbb{Z}$ slik at $n = 2k$. Da er $n^2 = 2 \cdot 2k$, som er et partall.
- (b) Om x er et partall finnes en $k \in \mathbb{Z}$ slik at $x = 2k$. Da er $xy = 2ky$, som er et partall.
- (c) Om b og c er delelig med a , finnes $k, \ell \in \mathbb{Z}$ slik at $b = ak$ og $c = a\ell$. Da er $b + c = a(k + \ell)$, som er delelig med a .

Løsning på oppgave 5.3. Her er Steg 1 og 2 slått sammen:

Vi vet: $f: A \rightarrow B$ er bijektiv, altså

- om $f(x_1) = f(x_2)$, er $x_1 = x_2$ (injektiv)
- om $y \in B$ så finnes $x \in A$ slik at $f(x) = y$ (surjektiv).

Vil vise: f er inverterbar, altså at det finnes en $g: B \rightarrow A$ slik at $g(f(x)) = x$ for alle $x \in A$, og $f(g(y)) = y$ for alle $y \in B$.

Vi skal altså skape en ny funksjon $g: B \rightarrow A$, så for enhver $y \in B$ må vi finne en verdi for $g(y)$. Og definisjonen for surjektivitet nevner noe om en $y \in B$. Vi gjør et første forsøk:

(...fortsetter fra sist)

- La $y \in B$.
- f er surjektiv, så det finnes $x \in A$ slik at $f(x) = y$.
- Vi prøver oss på å definere $g(y) = x$. (Det gir jo mening, for x er i A og y i B , og g skal gå fra B til A .)
- Da blir $y = f(x) = f(g(y))$. Som er det vi ville ha!
- Vi får også at $x = g(y) = g(f(x))$, som er den andre betingelsen vi trengte.

Det gikk jo fint. Men det gjenstår å vise at den nye funksjonen vi har lagd, faktisk er veldefinert:

(...fortsetter fra sist)

- Må vise at g er veldefinert, altså
 - $g(y)$ er et objekt i A for alle $y \in B$
 - $g(y)$ svarer til *kun ett* objekt i A .
- Vi definerte $g(y) = x$, der $x \in A$ var objektet slik at $f(x) = y$ (dette fikk vi fra surjektivitet av f).
- Siden $g(y) = x \in A$, ligger $g(y)$ i A .
- Om $g(y)$ ifølge denne definisjonen ga oss *to* objekter x_1 og x_2 i A , måtte (ifølge definisjonen) $f(x_1) = y$ og $f(x_2) = y$.
- Men f er injektiv også, og $f(x_1) = f(x_2)$, så $x_1 = x_2$. Altså svarer $g(y)$ til *kun ett* objekt i A .

Nå er vi ferdig med Steg 3. Det gjenstår å fullføre Steg 4. (I beviset nedenfor har vi kalt inversfunksjonen for f^{-1} istedenfor g .)

Bevis for nødvendighet i Teorem 5.3. Anta at f er bijektiv; vi ønsker å finne en inversfunksjon. La $y \in B$. Siden f er surjektiv vet vi at det finnes en $x \in A$ slik at $f(x) = y$. Vi definerer nå $f^{-1}(y) = x$.

Vi påstår først at f^{-1} er inversfunksjonen til f . La $x \in A$ og la $y = f(x)$. Fra definisjonen av f^{-1} vet vi at $f^{-1}(y) = x$, så $f^{-1}(f(x)) = f^{-1}(y) = x$. Motsatt, dersom $y \in B$ lar vi $x = f^{-1}(y)$. Fra definisjonen av f^{-1} vet vi da at $f(x) = y$, det vil si $f(f^{-1}(y)) = y$.

Vi så at f^{-1} er en veldefinert funksjon. Med definisjonen over har vi gitt en verdi til $f^{-1}(y)$ i alle punkter $y \in B$. Dersom det fantes to objekter x_1, x_2 slik at $f(x_1) = y$ og $f(x_2) = y$ så måtte, siden f er injektiv, x_1 og x_2 være like. Altså

har vi gitt nøyaktig én verdi til $f^{-1}(y)$. Dette viser at f^{-1} er veldefinert. ■

Løsning på oppgave 5.4. Først et fullstendig Steg 3:

Vi vet: x, y er reelle, ikke-negative tall, altså $x, y \geq 0$.

Vil vise: $xy \leq \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}y^2$.

- Andre kvadratsetning:

$$(x - y)^2 = x^2 - 2xy + y^2.$$

- Vet også

$$(x - y)^2 \geq 0$$

(kvadratet er aldri negativt).

- Da er

$$0 \leq x^2 - 2xy + y^2,$$

så

$$2xy \leq x^2 + y^2.$$

- Del på 2.

Og så et renskrevet bevis:

Bevis. Vi har

$$0 \leq (x - y)^2 = x^2 - 2xy + y^2.$$

Om vi flytter $2xy$ over på den andre siden og deler på 2 får vi

$$xy \leq \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}y^2,$$

som er det vi ønsket. ■

Løsning på oppgave 5.5. Vi fyller ut hver rad i de tre siste kolonnene. Hvis for eksempel P og Q er usanne (første rad i tabellen), blir $\neg P$ og $\neg Q$ sanne, og ifølge sannhetstabellen for $\Rightarrow$ er det sant at et sant utsagn impliserer et annet sant utsagn. Vi får til slutt:

P	Q	$P \Rightarrow Q$	$\neg P$	$\neg Q$	$\neg Q \Rightarrow \neg P$
U	U	S	S	S	S
U	S	S	S	U	S
S	U	U	U	S	U
S	S	S	U	U	S

Løsning på oppgave 5.6. Her er fullstendige bevis av hvert teorem:

(a) Anta kontrapositivt at n er et oddetall; vi vil vise at $3n + 5$ er et partall. Siden n er odde er $n = 2m + 1$ for et heltall m . Da er $3n + 5 = 3(2m + 1) + 5 = 2(3m + 4)$, som er et partall.

(b) Anta kontrapositivt at $x \geq 0$; vi vil vise at $x^2 + 5x \geq 0$. Vi har $x^2 \geq 0$ for alle $x \in \mathbb{R}$, og om $x \geq 0$ er $5x \geq 0$. Altså er $x^2 + 5x \geq 0$.

(c) Anta kontrapositivt at $x \geq 0$. Da er både $x^2 \geq 0$ og $5x \geq 0$, så $x^2 + 5x \geq 0$.

Løsning på oppgave 5.7. Her er fullstendige bevis av hvert teorem:

(a) Anta motsatt at n^2 er et partall, men n er et oddetall. Da er $n = 2k + 1$ for en $k \in \mathbb{Z}$, så $n^2 = 2(2k + 2) + 1$, et oddetall. Men da er n^2 både partall og oddetall, en selvmotsigelse.

(b) Beviset følger beviset for at $\sqrt{2}$ er irrasjonalt tett. Anta motsatt at $\sqrt{3}$ er rasjonalt, det vil si $\sqrt{3} = \frac{p}{q}$ for heltall p, q . Ved å fjerne felles faktorer i brøken $\frac{p}{q}$ kan vi anta at p og q ikke har felles faktorer. Vi kvadrerer og får $3 = \frac{p^2}{q^2}$, det vil si $p^2 = 3q^2$. Altså er p^2 delelig med 3, og da må også p være delelig med 3, det vil si $p = 3k$ for et heltall k . Da blir

$$3q^2 = (3k)^2 = 9k^2,$$

det vil si $q^2 = 3k^2$. Altså er q^2 , og dermed også q , delelige med 3. Men da er både p og q delelige med 3, samtidig som de ikke har felles faktorer — en motsigelse!

Løsning på oppgave 5.8.

(a) Når $n = 1$ står det $2^0 + 2^1 = 2^2 - 1$, som er sant. Anta så at formelen stemmer for $n = m$, for en $m \in \mathbb{N}$. Da er

$$\begin{aligned} 2^0 + \dots + 2^{m+1} &= (2^0 + \dots + 2^m) + 2^{m+1} = (2^{m+1} - 1) + 2^{m+1} \\ &= 2 \cdot 2^{m+1} - 1 = 2^{m+2} - 1, \end{aligned}$$

så formelen stemmer også for $n = m + 1$.

(b) For $n = 4$ er $n! = 24$ og $2^n = 16$, så ulikheten stemmer. Anta så at $m \geq 4$ er slik at $2^m < m!$. Da er

$$(m+1)! = m!(m+1) > 2^m \underbrace{(m+1)}_{\geq 2} \geq 2^m \cdot 2 = 2^{m+1},$$

så ulikheten stemmer også for $n = m + 1$.

Løsning på oppgave 5.9. Her er fullstendige bevis av hvert teorem:

(a) Om $4a$ er delelig med 7, finnes en $k \in \mathbb{Z}$ slik at $4a = 7k$, så $a = 7k/4$. Siden 7 er et primtall, er det ikke delelig med 4, og siden $7k/4$ er et heltall, må da k være delelig med 4. Med andre ord er $k = 4\ell$ for en $\ell \in \mathbb{Z}$, så

$$a = 7k/4 = 7 \cdot 4\ell/4 = 7\ell,$$

som er delelig med 7.

(b) Vi ønsker å vise at $\frac{2}{x(1-x)} \geq 1$, som er det samme som

$$2 \geq x(1-x)$$

(siden $x(1-x) \geq 0$ kunne vi gange med $x(1-x)$ på begge sider). Om $x \in (0, 1)$ er både x og $1-x$ positive og mindre enn 1, så produktet deres er positivt og mindre enn 1. Altså stemmer ulikheten.

Løsning på oppgave 5.10. Her er fullstendige bevis av hvert teorem:

- (a) Anta kontrapositivt at n ikke er delelig med 3. Dette er det samme som å si at enten $n = 3k + 1$ eller $n = 3k + 2$ for en $k \in \mathbb{Z}$. I det første tilfellet er

$$n^2 = 9k^2 + 6k + 1 = 3(3k^2 + 2k) + 1,$$

som ikke er delelig med 3. Likeledes, om $n = 3k + 2$ blir

$$n^2 = 9k^2 + 12k + 4 = 3(3k^2 + 4k + 1) + 1,$$

som ikke er delelig med 3. Altså er ikke n^2 delelig med 3.

- (b) Anta kontrapositivt at x og y ikke begge er partall; vi vil vise at enten xy eller $x + y$ er et oddetall. Vi antar at x er et oddetall; tilfellet der y er et oddetall er analogt. Da finnes $k \in \mathbb{Z}$ slik at $x = 2k + 1$, og dermed er

$$xy = 2ky + y \quad \text{og} \quad x + y = 2k + y + 1.$$

Dersom y er et oddetall, er det første tallet et oddetall (en sum av et partall og et oddetall), og dersom y er et partall, er det andre tallet et oddetall (en sum av to partall og et oddetall).

- (c) Anta kontrapositivt at n ikke er et primtall; vi vil vise at $2^n - 1$ ikke er et primtall. Om n ikke er et primtall, kan det skrives som $n = ab$ for $a, b \in \mathbb{N}$ med $a, b \geq 2$. Vi følger hintet og viser først at $2^n - 1$ er delelig med $2^a - 1$. Ved å skrive

$$2^n - 1 = (2^a)^b - 1$$

kan vi bruke den vanlige divisjonsalgoritmen til å finne at

$$\frac{2^n - 1}{2^a - 1} = \underbrace{(2^a)^{b-1} + (2^a)^{b-2} + \dots + 1}_{=c}.$$

Med andre ord er $2^n - 1 = c(2^a - 1)$. Siden $a \geq 2$ er $2^a - 1 > 1$, og siden $a < n$ er $2^a - 1 < 2^n - 1$. Altså er $2^n - 1$ delelig med et annet tall enn seg selv og 1, så det er ikke et primtall.

Løsning på oppgave 5.11. Her er fullstendige bevis av hvert teorem:

- (a) Anta motsatt at $a, b \in \mathbb{Z}$ er slik at $18a + 6b = 1$. Deler vi på 6 får vi

$$3a + b = \frac{1}{6}.$$

Men venstre side er et heltall, mens høyre side ikke er et heltall — en motsigelse.

- (b) Anta motsatt at $a^2 - 4b - 2 = 0$, slik at $a^2 = 4b + 2$. Dette er et partall, og om a^2 er et partall må også a være et partall, så $a = 2k$ for en $k \in \mathbb{Z}$. Da blir $4b + 2 = a^2 = 4k^2$, og deler vi på 4 får vi

$$b + \frac{1}{2} = k^2.$$

Men høyre side i denne ligningen er et heltall, mens venstre side *ikke* er et heltall — en motsigelse.

(c) Anta motsatt at $a^2 + b^2 = c^2$, men både a og b er oddetall. Da er også a^2 og b^2 oddetall, slik at $a^2 + b^2$ er et partall. La $k, \ell, m \in \mathbb{Z}$ være slik at $a = 2k + 1$, $b = 2\ell + 1$ og $c = 2m$. Setter vi inn i $a^2 + b^2 = c^2$ får vi

$$4k^2 + 4k + 1 + 4\ell^2 + 4\ell + 1 = 4m.$$

Del på 4 på begge sider og omorganiser for å få

$$k^2 + k + \ell^2 + \ell - m = -\frac{1}{2}.$$

Men venstre side i denne ligningen er et heltall, mens høyre side ikke er det — en motsigelse.

Løsning på oppgave 5.12.

(a) Når $n = 1$ står det $a_0 + a_1 = a_3 - 1$. Vi har $a_0 + a_1 = 1 + 1 = 2$ og $a_3 - 1 = 3 - 1 = 2$, så formelen stemmer. Anta så at formelen stemmer for $n = m$ for en $m \in \mathbb{N}$. Da er

$$a_0 + a_1 + \cdots + a_{m+1} = (a_0 + a_1 + \cdots + a_m) + a_{m+1} = a_{m+2} + a_{m+1} - 1 = a_{m+3} - 1$$

(siden a_{m+3} er gitt av summen av de foregående leddene i følgen), så formelen stemmer også for $n = m + 1$.

(b) For $n = 0$ er $n^3 - n = 0$, som er delelig med 6. Anta så at $m \in \mathbb{N}_0$ er slik at $m^3 - m$ er delelig med 6, og skriv $m^3 - m = 6k$ for en $k \in \mathbb{Z}$. Da er

$$\begin{aligned} (m+1)^3 - (m+1) &= m^3 + 3m^2 + 2m \\ &= (m^3 - m) + 3(m^2 + m) \\ &= 6k + 3(m^2 + m). \end{aligned}$$

Vi vet at m^2 har samme paritet som m (de er enten begge partall, eller begge oddetall), så $m^2 + m$ er et partall, $m^2 + m = 2\ell$ for en $\ell \in \mathbb{Z}$. Dermed er

$$(m+1)^3 - (m+1) = 6k + 6\ell,$$

som er delelig med 6. Altså stemmer utsagnet også for $n = m + 1$.

(c) Vi bruker sterk induksjon. Når $n = 0$ er $a_n = 1$ og $2^n = 1$, så ulikheten stemmer for $n = 0$. Anta så at $m \in \mathbb{N}_0$ er slik at $a_n \leq 2^n$ for alle $n = 0, \dots, m$. Da er

$$a_{m+1} = a_m + a_{m-1} \leq 2^m + 2^{m-1} \leq 2 \cdot 2^m = 2^{m+1},$$

så ulikheten stemmer også for $n = m + 1$.

(d) Når $n = 1$, består A kun av ett element, $A = \{x\}$. Da har A kun de to delmengdene $\emptyset$ og A , som stemmer med at $2^n = 2$. Anta så at utsagnet stemmer for alle mengder med $n = m$ elementer (for en $m \in \mathbb{N}$), og la A ha kardinalitet $\#A = m + 1$. La $x \in A$ være et vilkårlig element i A , og definer $B = A \setminus \{x\}$. Da er $\#B = m$, så B har 2^m delmengder. For hver av delmengdene $C \subseteq B$ kan vi lage nøyaktig to nye delmengder av A , nemlig C og $C \cup \{x\}$. På denne måten finner vi alle delmengder av A . Altså har A dobbelt så mange delmengder som B , så $\#A = 2 \cdot \#B = 2 \cdot 2^m = 2^{m+1}$. Utsagnet stemmer altså også for $n = m + 1$.

(e) Definer $f(n)$ til å være antall regioner med n linjer; vi påstår at

$$f(n) = \frac{n^2 + n + 2}{2} \quad \text{for alle } n \geq 2.$$

La først $n = 2$. To ikke-parallele linjer krysser hverandre i ett punkt, og deler planet inn i fire deler, så $f(2) = 4$. Og når $n = 2$ er $\frac{n^2+n+2}{2} = 4$, så formelen stemmer for $n = 2$. Anta så at formelen stemmer for $n = m$ for en $m \geq 2$, så

$$f(m) = \frac{m^2 + m + 2}{2}.$$

Vi legger til en linje som ikke er parallell med noen av de andre, og som ikke går gjennom noen av de eksisterende krysningspunktene. Da vil den nye linja krysse hver av de andre m linjene nøyaktig én gang (fordi de ikke er parallelle), som til sammen gir m nye krysningspunkter (fordi krysningspunktene er forskjellige). Hver gang linja krysser en annen linje, forlater den én region og går inn i en ny region, og den deler hver slik region i to. Siden den nye linja går gjennom $m + 1$ eksisterende regioner, vil det oppstå $m + 1$ nye regioner (de $m + 1$ regionene deles opp i $2m + 2$ regioner). Altså er

$$f(m + 1) = f(m) + m + 1.$$

På den annen side er

$$\frac{(m + 1)^2 + (m + 1) + 2}{2} = \frac{m^2 + m + 2}{2} + m + 1 = f(m) + m + 1,$$

som jo er det samme som $f(m + 1)$. Altså stemmer formelen for $n = m + 1$.

Kapittel A

Løsning på oppgave A.1. La $f: A \rightarrow B$ være inklusjonsfunksjonen $f(x) = x$ (se Oppgave 3.3). Siden $A \subseteq B$, er denne funksjonen veldefinert. Da er f injektiv, for om $x, y \in A$ er slik at $f(x) = f(y)$, er $x = f(x) = f(y) = y$, altså $x = y$. Dermed er $\#A \leq \#B$.

Løsning på oppgave A.2. Likhetsymbolet $=$ på en mengde X oppfyller både refleksivitet, symmetri og transitivitet, så $=$ er en ekvivalensrelasjon. Om $x \in X$, er dens ekvivalensklasse $[x]$ bare mengden $\{x\}$, for om $y \in [x]$ må $y = x$, av definisjonen av $[x]$.

Kapittel B

Løsning på oppgave B.2.

- (a) Mengden F svarer til funksjonen $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ gitt ved $f(x) = x^2$.
- (b) Mengden G svarer ikke til en funksjon, for det finnes flere funksjonsverdier (andre komponent av paret) som svarer til punktet 0.
- (c) Mengden H svarer til funksjonen $h(x) = 0$ for alle $x \in \mathbb{R}$.

REGISTER

D_f , 15

V_f , 15

$\mathbb{N}$, 7

$\mathbb{N}_0$, 7

$\mathbb{Q}$, 8

$\mathbb{R}$, 8

$\exists$, 25

$\forall$, 25

$\in$, $\notin$, 7

$\mapsto$, 16

$:=$, 5

$\nexists$, 25

■, *Se* QED

n -tupel, 13

antagelse, 30

argument, 15

avbildning, 15

betinget utsagn, 30

bijektiv, 17

bilde, 15

De Morgans lover, 13

definisjonsområde, 15

delelig, 31

delmengde, 9

den tomme mengden, 7

domene, 15

ekte delmengde, 9

ekvivalensklassen, 42

ekvivalensrelasjon, 42

ekvivalent med, 24

funksjon, 15, 45

graf, 45

identitetsfunksjonen, 16

induksjonsbevis, 38

induksjonshypotese, 38

injektiv, 17

inklusionsfunksjonen, 16

intervall, 8

inversfunksjon, 18

inverterbar, 18

kardinalitet, 10, 43

kodomene, 15

komplement, 12

komponent, 13

komposisjon, 17

konklusjon, 30

konnektiv, 21

ekvivalent med, 24

eller, 22

impliserer, 23

negasjon, 21

og, 22

kvantor, 25

det eksisterer, 25

for alle, 25

likhet mellom funksjoner, 15

lukket intervall, 8

lukket uttrykk, 15

mengde, 7

mengdebyggenotasjon, 8

mengdedifferanse, 11

motsigelsesbevis, 36

naturlige tall, 7

oddetall, 33

og, 22

omvendt funksjon, 18

ordnet par, 13

partall, 31

predikat, 20

QED, 4

rasjonale tall, 8

reductio ad absurdum, *Se*
motsigelsesbevis

reelle tall, 8

reellvaluert, 15

sannhetstabell, 21
snitt, 11
sterk induksjon, 40
surjektiv, 17

tallinja, 8
tellbar, 44
trippel, 13

union, 11

utsagn, 20

variabel, 15
veldefinert, 15
verdimengde, 15
verdiområde, 15

Youngs ulikhet, 34

åpent intervall, 8