

Fra i går: Vi definerte lengde, skalarprodukt, ortogonalitet.

Proposisjon 1.9 Regneregler for reelt skalarprodukt

1. $\vec{a} \cdot \vec{a} = |\vec{a}|^2$
2. $\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a}$
3. $\vec{c} \cdot (\vec{a} + \vec{b}) = \vec{c} \cdot \vec{a} + \vec{c} \cdot \vec{b}$ og $(\vec{a} + \vec{b}) \cdot \vec{c} = \vec{a} \cdot \vec{c} + \vec{b} \cdot \vec{c}$
4. $(s\vec{a}) \cdot \vec{b} = \vec{a} \cdot (s\vec{b}) = s(\vec{a} \cdot \vec{b})$

Bevis for 3.:

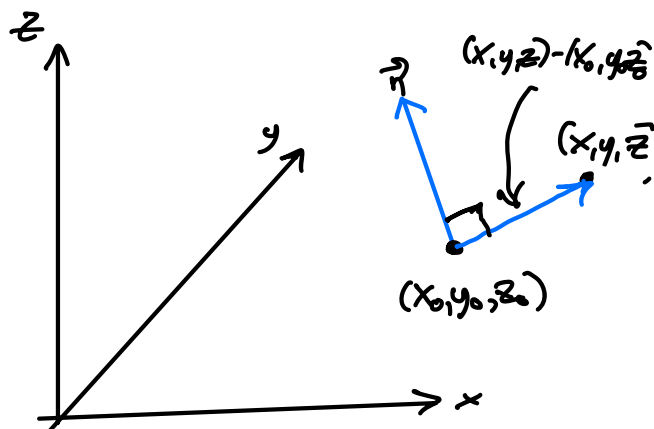
$$\begin{aligned}\vec{c} \cdot (\vec{a} + \vec{b}) &= (c_1, \dots, c_n) \cdot ((a_1, \dots, a_n) + (b_1, \dots, b_n)) \\ &= (c_1, \dots, c_n) \cdot (a_1 + b_1, \dots, a_n + b_n) \\ &= c_1(a_1 + b_1) + \dots + c_n(a_n + b_n) \\ &= c_1 a_1 + c_1 b_1 + \dots + c_n a_n + c_n b_n \\ &= (c_1 a_1 + \dots + c_n a_n) + (c_1 b_1 + \dots + c_n b_n) \\ &= (\vec{c} \cdot \vec{a}) + (\vec{c} \cdot \vec{b}) \\ &= \vec{c} \cdot \vec{a} + \vec{c} \cdot \vec{b} \quad \blacksquare\end{aligned}$$

Eksempel 1.10 La oss finne et uttrykk for planet som går gjennom (x_0, y_0, z_0) , og står normalt på $\vec{n} = (a, b, c)$

at (x, y, z) ligger i dette planet er det samme som at

$(x, y, z) - (x_0, y_0, z_0)$ er ortogonal på $\vec{n} = (a, b, c)$

$$\begin{aligned}0 &= ((x, y, z) - (x_0, y_0, z_0)) \cdot (a, b, c) \\ &= (x - x_0, y - y_0, z - z_0) \cdot (a, b, c) \\ &= a(x - x_0) + b(y - y_0) + c(z - z_0) \\ &= (ax + by + cz) - (ax_0 + by_0 + cz_0)\end{aligned}$$



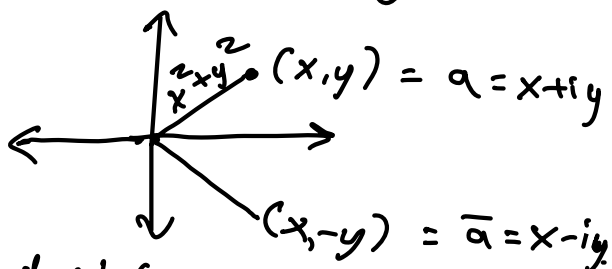
Dermed blir planet: $ax + by + cz = d$.

Komplekse vektor

Hvis $\vec{a}$ er kompleks definerer vi $|\vec{a}| = \sqrt{|a_1|^2 + |a_2|^2 + \dots + |a_n|^2}$
Ser her: $|\vec{a}| \geq 0$, og $|\vec{a}| = 0 \Leftrightarrow \vec{a} = \vec{0}$.

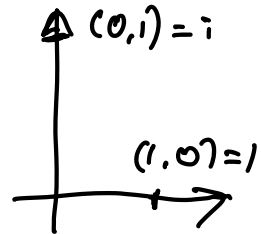
For $\vec{a}$ og $\vec{b}$ kompleks definerer vi $\vec{a} \cdot \vec{b} = a_1 \bar{b}_1 + \dots + a_n \bar{b}_n$
Konjugasjon (der $\overline{x+iy} = x-iy$)

$$\begin{aligned} a \cdot \bar{a} &= (x+iy) \cdot (x-iy) \\ &= x^2 + y^2 \end{aligned}$$



Den komplekse definisjonen er en utvidelse av den reelle.

$$\begin{aligned} |(1+i, 1-i)| &= \sqrt{|1+i|^2 + |1-i|^2} \\ &= \sqrt{1^2 + 1^2 + 1^2 + (-1)^2} = \sqrt{1+1+1+1} = \sqrt{4} = 2 \\ \vec{a} \cdot \vec{a} &= |\vec{a}|^2 \\ &= \sqrt{(1+i)(1+i) + (1-i)(1-i)} \\ &= \sqrt{(1+i)(1-i) + (1-i)(1+i)} \\ &= \sqrt{1^2 - i^2 + 1^2 - i^2} = \sqrt{1+1+1+1} = 2 \end{aligned}$$



Proposisjon 1.11 La $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \in \mathbb{C}^n$, $s \in \mathbb{C}$. Da er

1. $\vec{a} \cdot \vec{a} = |\vec{a}|^2$
2. $\vec{a} \cdot \vec{b} = \overline{\vec{b} \cdot \vec{a}}$
3. $\vec{c} \cdot (\vec{a} + \vec{b}) = \vec{c} \cdot \vec{a} + \vec{c} \cdot \vec{b}$ og $\vec{a} \cdot (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{a} \cdot \vec{c}$
4. $(s\vec{a}) \cdot \vec{b} = s(\vec{a} \cdot \vec{b})$ og $\vec{a} \cdot (s\vec{b}) = \bar{s}(\vec{a} \cdot \vec{b})$

Beris 4.: $(s\vec{a}) \cdot \vec{b} = (sa_1, \dots, sa_n) \cdot (b_1, \dots, b_n)$

$$\begin{aligned} &= sa_1 \bar{b}_1 + \dots + sa_n \bar{b}_n \\ &= s(a_1 \bar{b}_1 + \dots + a_n \bar{b}_n) \\ &= s(\vec{a} \cdot \vec{b}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \vec{a} \cdot (\overline{s\vec{b}}) &= (a_1, \dots, a_n) \cdot (\overline{s b_1}, \dots, \overline{s b_n}) \\
 &= a_1 \overline{(s b_1)} + \dots + a_n \overline{(s b_n)} \\
 &= a_1 \overline{s} \overline{b_1} + \dots + a_n \overline{s} \overline{b_n} \\
 &= \overline{s} (a_1 \overline{b_1} + \dots + a_n \overline{b_n}) \\
 &= \overline{s} (\vec{a} \cdot \vec{b}) \quad \blacksquare
 \end{aligned}$$

$$|\vec{a}| \text{ i Matlab: } \sqrt{\text{sum}(\text{abs}(a), 2)}$$

$$\sqrt{|a_1|^2 + |a_2|^2 + \dots + |a_n|^2}$$

Exempel 1.12

$$\vec{a} = (2i, 1+i, 3) \quad , \quad \vec{b} = (1+2i, -1, 2-i)$$

$$\begin{aligned}
 |\vec{a}| &= \sqrt{|2i|^2 + |1+i|^2 + 3^2} \\
 &= \sqrt{(2i)(\overline{2i}) + (1+i)(\overline{1+i}) + 3^2} \\
 &= \sqrt{2i(-2i) + (1+i)(1-i) + 3^2} \\
 &= \sqrt{4 + 1^2 - i^2 + 9} = \sqrt{4+1+1+9} = \sqrt{15}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \vec{a} \cdot \vec{b} &= (2i, 1+i, 3) \cdot (1+2i, -1, 2-i) \\
 &= 2i \overline{(1+2i)} + (1+i)(-1) + 3 \overline{(2-i)} \\
 &= 2i(1-2i) - 1-i + 3(2+i) \\
 &= 2i - 4i^2 - 1 - i + 6 + 3i \\
 &= \underline{2i} + 4 - 1 - \underline{i} + 6 + \underline{3i} \\
 &= 4i + 9
 \end{aligned}$$

prog av skalarprodukt i Matlab: `sum(a.*conj(b))`

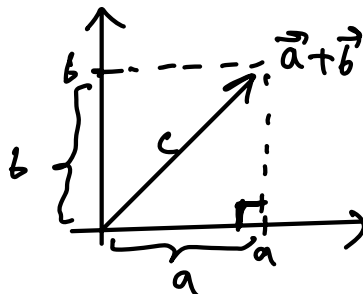
Hvis $\vec{a}$ og $\vec{b}$ er ortogonale ($\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$), har vi at

$$\begin{aligned} |\vec{a} + \vec{b}|^2 &= (\vec{a} + \vec{b}) \cdot (\vec{a} + \vec{b}) = \underbrace{\vec{a} \cdot \vec{a}}_0 + \underbrace{\vec{a} \cdot \vec{b}}_{\vec{a} \cdot \vec{b} = 0 = 0} + \underbrace{\vec{b} \cdot \vec{a}}_{\vec{a} \cdot \vec{b} = 0 = 0} + \vec{b} \cdot \vec{b} \\ &= \vec{a} \cdot \vec{a} + \vec{b} \cdot \vec{b} = |\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2 \end{aligned}$$

Tolkning av $|\vec{a} + \vec{b}|^2 = |\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2$ for $n=2$, $\vec{a} = (a, 0)$, $\vec{b} = (0, b)$:

Da har vi at $|\vec{a}| = a$, $|\vec{b}| = b$, slik at med $c = |\vec{a} + \vec{b}|$, så har vi

$$c^2 = a^2 + b^2$$



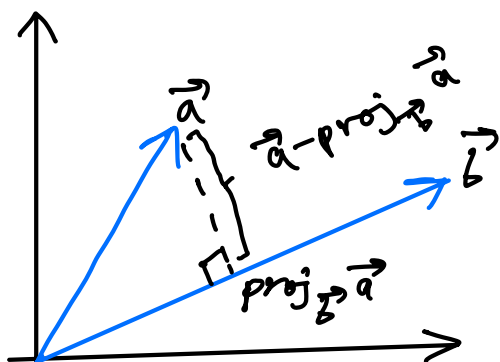
Dette er en generalisering av Pythagoras til dimensjon n , og til komplekse vektorer.

Vi sier at $\vec{a}$ og $\vec{b}$ er parallelle hvis $\vec{a} = s\vec{b}$ for en skalar s .

Proposisjon 1.13

Anta $\vec{b} \neq \vec{0}$. Punktet på linja gjennom $\vec{0}$ og $\vec{b}$ som ligger nærmest $\vec{a}$ er $\frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{b}|^2} \vec{b}$. Dette punktet er unikt, og kalles for projeksjonen av $\vec{a}$ ned på $\vec{b}$.

Vi skriver $\text{proj}_{\vec{b}} \vec{a}$ for denne



Vi viser først at $\vec{a} - \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{b}|^2} \vec{b}$ og $\vec{b}$ er ortogonale:

$$\begin{aligned} \left(\vec{a} - \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{b}|^2} \vec{b} \right) \cdot \vec{b} &= \vec{a} \cdot \vec{b} - \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{b}|^2} \vec{b} \cdot \vec{b} \\ &= \vec{a} \cdot \vec{b} - \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{b}|^2} |\vec{b}|^2 = \vec{a} \cdot \vec{b} - \vec{a} \cdot \vec{b} = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Vi får } |\vec{a} - s\vec{b}|^2 &= \left| \vec{a} - \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{b}|^2} \vec{b} + \left(\frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{b}|^2} \vec{b} - s\vec{b} \right) \right|^2 \\ &= \left| \underbrace{\vec{a} - \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{b}|^2} \vec{b}}_{\text{ortogonal}} + \underbrace{\left(\frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{b}|^2} - s \right) \vec{b}}_{\text{ortogonal}} \right|^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Pythagoras} \\ &= \left| \vec{a} - \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{b}|^2} \vec{b} \right|^2 + \underbrace{\left| \left(\frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{b}|^2} - s \right) \vec{b} \right|^2}_{\geq 0} \\ &\geq \left| \vec{a} - \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{b}|^2} \vec{b} \right|^2 \end{aligned}$$

Likhet kun når $s = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{b}|^2}$

Derfor er $|\vec{a} - s\vec{b}| \geq \left| \vec{a} - \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{b}|^2} \vec{b} \right|$ for alle s , slik at $\frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{b}|^2} \vec{b}$ er det ^{unike} punktet på linja gjennom $\vec{0}$ og $\vec{b}$ som er nærmest $\vec{a}$.

Fra beviset: $\vec{a} = \left(\vec{a} - \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{b}|^2} \vec{b} \right) + \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{b}|^2} \vec{b}$ er en dekomposisjon av $\vec{a}$ i to vektorer der

- en er ortogonal på $\vec{b}$
- en er parallell med $\vec{b}$

Dette kalles for en ortogonal dekomposisjon av $\vec{a}$.