

Eksempel 1.12

Med $\vec{a} = (10, 5)$, $\vec{b} = (2, 4)$, så er

$$|\vec{b}|^2 = 2^2 + 4^2 = 4 + 16 = 20$$

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = (10, 5) \cdot (2, 4) = 10 \cdot 2 + 5 \cdot 4 = 20 + 20 = 40$$

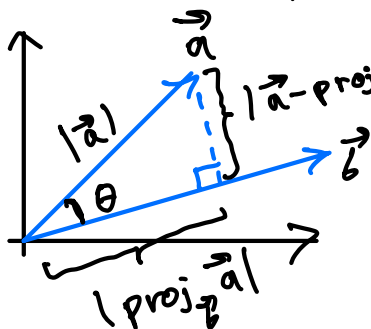
$$\text{proj}_{\vec{b}} \vec{a} = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{b}|^2} \vec{b} = \frac{40}{20} (2, 4) = 2(2, 4) = \underline{(4, 8)}$$

$$\vec{a} - \text{proj}_{\vec{b}} \vec{a} = (10, 5) - (4, 8) = (10 - 4, 5 - 8) = \underline{(6, -3)}$$

Derfor er $\vec{a} = (10, 5) = (6, -3) + (4, 8)$ en ortogonal decomp av $\vec{a}$.

Sjekk: $(6, -3) \cdot (4, 8) = 6 \cdot 4 - 3 \cdot 8 = 24 - 24 = 0$

$$(6, -3) + (4, 8) = (6 + 4, -3 + 8) = (10, 5) = \vec{a}$$



Ser at:

$$\frac{|\text{proj}_{\vec{b}} \vec{a}|}{|\vec{a}|} = \frac{|\vec{a} \cdot \vec{b}|}{|\vec{a}| |\vec{b}|} = \cos \theta$$

slik at $|\vec{a} \cdot \vec{b}| = |\vec{a}| |\vec{b}| \cos \theta$

Eksempel

Vi utleder formel for $\cos$ til differens av to vinkler:

$$\text{Sett } \vec{a} = (\cos \theta_1, \sin \theta_1), \vec{b} = (\cos \theta_2, \sin \theta_2), \theta = \theta_2 - \theta_1$$

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = \cos \theta_1 \cos \theta_2 + \sin \theta_1 \sin \theta_2$$

$$|\vec{a}| = |\vec{b}| = 1$$

$$|\vec{a} \cdot \vec{b}| = |\vec{a}| |\vec{b}| \cos \theta$$

$$|\cos \theta_1 \cos \theta_2 + \sin \theta_1 \sin \theta_2| = \cos(\theta_2 - \theta_1)$$

Proposisjon 1.15 Schwarz ulikhet

Vi har at $|\vec{a} \cdot \vec{b}| \leq |\vec{a}| |\vec{b}|$, med likhet hvis og bare hvis enten

- 1. $\vec{a}$ og $\vec{b}$ er parallelle
- 2. minst en av dem er $\vec{0}$.

Beweis: Pythagoras gir

Likhet $\vec{a} = \text{proj}_{\vec{b}} \vec{a} \Leftrightarrow \vec{a}, \vec{b}$ parallelle.

$$|\vec{a}|^2 = |\vec{a} - \text{proj}_{\vec{b}} \vec{a}|^2 + |\text{proj}_{\vec{b}} \vec{a}|^2 \geq |\text{proj}_{\vec{b}} \vec{a}|^2$$

Tar kvadratrøtter:

$$|\vec{a}| \geq |\text{proj}_{\vec{b}} \vec{a}| = \frac{|\vec{a} \cdot \vec{b}|}{|\vec{b}|}$$

$|\vec{a}| |\vec{b}| \geq |\vec{a} \cdot \vec{b}|$, som er Schwarz ulikhet

Proposisjon 1.16 Trekantulikheten

Vi har at $|\vec{a} + \vec{b}| \leq |\vec{a}| + |\vec{b}|$ for $\vec{a}, \vec{b} \in \mathbb{C}^n$, med likhet hvis og bare hvis enten

- 1. $\vec{a} = s\vec{b}$ med $s > 0$
- 2. minst en av dem er $\vec{0}$

Beweis: $|\vec{a} + \vec{b}|^2 = (\vec{a} + \vec{b}) \cdot (\vec{a} + \vec{b}) = \vec{a} \cdot \vec{a} + \vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{b} \cdot \vec{a} + \vec{b} \cdot \vec{b}$

$\vec{a} \cdot \vec{b} + \overline{\vec{a} \cdot \vec{b}} = 2 \text{Re}(\vec{a} \cdot \vec{b})$

$$\begin{aligned} &= |\vec{a}|^2 + 2 \text{Re}(\vec{a} \cdot \vec{b}) + |\vec{b}|^2 \\ &\stackrel{(1)}{\leq} |\vec{a}|^2 + 2 |\vec{a} \cdot \vec{b}| + |\vec{b}|^2 \\ &\stackrel{\text{Schwarz}}{\leq} |\vec{a}|^2 + 2 |\vec{a}| |\vec{b}| + |\vec{b}|^2 \\ &= (|\vec{a}| + |\vec{b}|)^2 \end{aligned}$$

Tar kvadratrøtter: $|\vec{a} + \vec{b}| \leq |\vec{a}| + |\vec{b}|$

Før likhet: trekantulikheten ser vi at vi både må ha likhet i Schwarz ulikhet ($\Rightarrow$ parallelle, og at

$$\operatorname{Re}(\vec{a} \cdot \vec{b}) = |\vec{a} \cdot \vec{b}| \Rightarrow \vec{a} \cdot \vec{b} \text{ positiv} \Rightarrow \vec{a} = s\vec{b}, \text{ for en } s > 0$$

Trekantulikheten sier at "korteste vei mellom to punkter er en rett linje":

