

Kap. 2

I en matrise listes komponentene opp i to retninger:
horisontalt / vertikalt.

store bokstaver $\rightarrow A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & & a_{mn} \end{pmatrix}$ spalte 2

en $m \times n$ matrise

små bokstaver.

parentes angir start/slutt på matrisen.

rad 2

Alle rader skal ha like mange komponenter ($\cdot n$)
Alle søyer skal ha like mange komponenter (m)

A kalles kvadratisk hvis $m=n$, en radvektor hvis $m=1$,
en søylevektor hvis $n=1$.

Vi skriver A^T for den transponerte til A.

Denne har komponenter $(A^T)_{ij} = A_{ji}$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ 9 & 10 & 11 & 12 \end{pmatrix} \Rightarrow A^T = \begin{pmatrix} 1 & 5 & 9 \\ 2 & 6 & 10 \\ 3 & 7 & 11 \\ 4 & 8 & 12 \end{pmatrix}$$

Vektoriserte operasjoner på matriser

- $A+B$ er matrisen med komponenter $a_{ij} + b_{ij}$
- $A-B$ er matrisen med komponenter $a_{ij} - b_{ij}$
- tA er matrisen med komponenter $t a_{ij}$

Eksempel 1:

$$2 \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 7 & 2 \end{pmatrix} + 3 \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 3 & -4 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 2 \cdot 1 & 2 \cdot 4 \\ 2 \cdot 7 & 2 \cdot 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3(-1) & 3 \cdot 0 \\ 3 \cdot 3 & 3 \cdot (-4) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 8 \\ 14 & 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -3 & 0 \\ 9 & -12 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 2-3 & 8+0 \\ 14+9 & 4-12 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 8 \\ 23 & -8 \end{pmatrix}$$

NB! Spesiell syntaks når A er en søylevektor $\vec{a}$,
 B er en radvektor $\vec{b}$,

Matlab/Python regner ut $\vec{a} + \vec{b}$ som $\begin{pmatrix} a_1+b_1 & a_1+b_2 & \dots & a_1+b_n \\ a_2+b_1 & a_2+b_2 & \dots & a_2+b_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_m+b_1 & a_m+b_2 & \dots & a_m+b_n \end{pmatrix}$
 komponent (i,j) er $a_i + b_j$

Eksempel Hilbertmatrisen H har komponenter $h_{kl} = \frac{1}{k+l-1}$

Eksempel En Vandermondematrise er definert ved

$$V = \begin{pmatrix} 1 & x_1 & \dots & x_1^n \\ 1 & x_2 & \dots & x_2^n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & x_m & \dots & x_m^n \end{pmatrix},$$

der $x_1, \dots, x_m$ kalles for generatorene til V .

Matrisemultiplikasjon

Vi skal se på systemer av likninger

$$\left. \begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n &= b_2 \\ \vdots & \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n &= b_m \end{aligned} \right\} \begin{matrix} (*) \\ m \text{ likninger, } n \text{ ukjente} \end{matrix}$$

Vi setter $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$ $\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ $\vec{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$

Vi definerer matrise-vektor produktet $A\vec{x}$ ved

$$A\vec{x} = \begin{pmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n \end{pmatrix} \quad (***)$$

$$x_1 \vec{a}_1 + x_2 \vec{a}_2 + \dots + x_n \vec{a}_n$$

$\vec{a}_i$ er søjle i i A .

Merk: A må ha n søjler.

(*) kan nå skrives som $A\vec{x} = \vec{b}$

Eksempel:

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 2 \\ 4 & 1 & 7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \cdot (-1) + 3 \cdot 2 + 2 \cdot (-2) \\ 4 \cdot (-1) + 1 \cdot 2 + 7 \cdot (-2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 + 6 - 4 \\ -4 + 2 - 14 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -16 \end{pmatrix}$$

Anta så at vi vil løse (*) for forskjellige høyresider $\vec{b}_1, \vec{b}_2, \dots$

$$A\vec{x}_1 = \vec{b}_1 \quad A\vec{x}_2 = \vec{b}_2 \quad \dots \quad A\vec{x}_k = \vec{b}_k$$

Hvis A er $m \times n$, og X er $n \times k$ så definerer vi matriseproduktet AX som $m \times k$ matrisen

$$AX = \begin{pmatrix} A\vec{x}_{:,1} & A\vec{x}_{:,2} & \dots & A\vec{x}_{:,k} \end{pmatrix} \quad (***)$$

$[\vec{b}_1 \ \vec{b}_2 \ \dots \ \vec{b}_k]$ $\vec{x}_1$ $\vec{x}_2$ $\vec{x}_k$

Søyle k i $AX = B$ sier $A\vec{x}_{:,k} = \vec{b}_k$, som er (*)

Matrise kan derfor tenkes på som en sammensetning av

flere løsningsystemer

Matriseproduktet regnes vanligvis ut komponentvis:

på grunn av (***) : komponent (i,j) i AX er lik
komponent i i $AX_{:,j}$, som er (**)

$$a_{i1}x_{1j} + a_{i2}x_{2j} + \dots + a_{in}x_{nj}$$

$$(AX)_{ij} = \sum_{r=1}^n a_{ir}x_{rj} \quad (4)$$

Eksempel

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 2 & 3 & 2 \\ 4 & 1 & 7 \end{pmatrix}}_{2 \times 3} \underbrace{\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 2 & 3 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}}_{3 \times 2}$$

Produktet skal bli 2×2 .

$$\begin{aligned} &= \begin{pmatrix} 2 \cdot (-1) + 3 \cdot 2 + 2 \cdot (-2) & 2 \cdot 0 + 3 \cdot 3 + 2 \cdot 1 \\ 4 \cdot (-1) + 1 \cdot 2 + 7 \cdot (-2) & 4 \cdot 0 + 1 \cdot 3 + 7 \cdot 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -2 + 6 - 4 & 0 + 9 + 2 \\ -4 + 2 - 14 & 0 + 3 + 7 \end{pmatrix} = \underline{\underline{\begin{pmatrix} 0 & 11 \\ -16 & 10 \end{pmatrix}}} \end{aligned}$$