

Eksempel ① $\begin{bmatrix} 2 & 3 & 2 \\ 4 & 1 & 7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 2 & 3 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$, Produktet skal bli 2×2 (13)

bruker (a)
 $i=1, j=1: 2 \cdot (-1) + 3 \cdot 2 + 2 \cdot (-2) = -2 + 6 - 4 = 0$

$i=1, j=2: 2 \cdot 0 + 3 \cdot 3 + 2 \cdot 1 = 0 + 9 + 2 = 11$

Skriv heller ut slik;

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 & 2 \\ 4 & 1 & 7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 2 & 3 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \cdot (-1) + 3 \cdot 2 + 2 \cdot (-2) & 2 \cdot 0 + 3 \cdot 3 + 2 \cdot 1 \\ 4 \cdot (-1) + 1 \cdot 2 + 7 \cdot (-2) & 4 \cdot 0 + 1 \cdot 3 + 7 \cdot 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -2 + 6 - 4 & 9 + 2 \\ -4 + 2 - 14 & 3 + 7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 11 \\ -16 & 10 \end{bmatrix}$$

Kontrollregning med Matlab:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 2 \\ 4 & 1 & 7 \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 2 & 3 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$$

$A \cdot B$

Kan også tolkes som skalarprodukter: $(2, 3, 2) \cdot (-1, 2, -2) = 0$
 $(2, 3, 2) \cdot (0, 3, 1) = 11$, osv.

Eksempel: Hvis $\vec{a} \in \mathbb{R}^m$ og $\vec{x}$ er søylevektorene $\mathbb{R}^n$, så er $\vec{a} \vec{x}^T$ definert og gir en $m \times n$ -matrise;

$$\vec{a} \vec{x}^T = \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_m \end{pmatrix} (x_1 \dots x_n) = \begin{pmatrix} a_1 x_1 & a_1 x_2 & \dots & a_1 x_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_m x_1 & a_m x_2 & \dots & a_m x_n \end{pmatrix}$$

Dette kalles også for ytreproduktet av $\vec{a}$ og $\vec{x}$

Proposisjon 2.11 La A, B, C være matriser. Da har vi at

1. $(AB)C = A(BC)$
2. $A(B+C) = AB + AC$
3. $(A+B)C = AC + BC$
4. $s(AB) = (sA)B = A(sB)$ for alle skalarer s .
5. Hvis A er $m \times n$ så er $A I_n = I_m A = A$
 dvs. I_n oppfører seg som tallet 1 ved multiplikasjon.
 Resultat fordrer at "dimensjoner matcher"

Merke: pga 1. er det vanlig å skrive ABC , dvs. uten parenteser.

Merke: Vi har ikke generelt at $AB = BA$!

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Beris 2. komponent (i,j) i $A(B+C) : \sum_{r=1}^n a_{ir}(B+C)_{rj}$ (14)

$$= \sum_{r=1}^n a_{ir}(b_{rj} + c_{rj}) = \sum_{r=1}^n a_{ir}b_{rj} + \sum_{r=1}^n a_{ir}c_{rj}$$

$$= (AB)_{ij} + (AC)_{ij} = (AB+AC)_{ij}$$

Siden $(A(B+C))_{ij} = (AB+AC)_{ij}$ for alle i,j så er $A(B+C) = AB+AC$.

I boka viser vi at $AX = \sum_{r=1}^n \overset{\substack{\uparrow \\ \text{søyler i A}}}{\vec{a}_r} \cdot \overset{\substack{\uparrow \\ \text{rad i X}}}{\vec{x}_r}$

Dette kalles den ytre formen for et matriseprodukt

2.3 Lineære avbildninger og matrisemultiplikasjon

En avbildning $\vec{F}$ fra $\mathbb{R}^n$ til $\mathbb{R}^m$ kalles lineær hvis

$$1. \vec{F}(\vec{a}_1 + \vec{a}_2) = \vec{F}(\vec{a}_1) + \vec{F}(\vec{a}_2)$$

$$2. \vec{F}(c\vec{a}) = c\vec{F}(\vec{a})$$

for alle $\vec{a}, \vec{a}_1, \vec{a}_2 \in \mathbb{R}^n$, skalarer c.

$x \mapsto Ax$ er lineær (pga. egenskaper til matrisemultiplikasjon)

Alle lineære avbildninger kan faktisk skrives på formen $x \mapsto Ax$ og!

Beris: La $\vec{e}_i$ være søylevektoren som er 1 i komponent i, og 0 ellers.

$$\begin{aligned} \text{Vi har } \vec{F}(\vec{x}) &= \vec{F}(x_1 \dots x_n) = \vec{F}(x_1 \vec{e}_1 + x_2 \vec{e}_2 + \dots + x_n \vec{e}_n) \\ &= x_1 \vec{F}(\vec{e}_1) + x_2 \vec{F}(\vec{e}_2) + \dots + x_n \vec{F}(\vec{e}_n) \\ &\stackrel{\text{def. av matrisemult}}{=} \underbrace{[\vec{F}(\vec{e}_1) \vec{F}(\vec{e}_2) \dots \vec{F}(\vec{e}_n)]}_A \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Eksempel 2.13 Hva er matrisen til en projeksjon? egenkap ved skalar prod.

Det er kjent at $\vec{a} \rightarrow \text{proj}_{\vec{b}} \vec{a} = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{b}|^2} \vec{b}$ er lineær (i $\vec{a}$)

matrisen blir

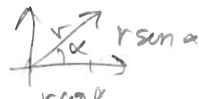
$$[\text{proj}_{\vec{b}} \vec{e}_1 \text{proj}_{\vec{b}} \vec{e}_2 \dots \text{proj}_{\vec{b}} \vec{e}_n] = \left[\frac{\vec{e}_1 \cdot \vec{b}}{|\vec{b}|^2} \vec{b} \quad \frac{\vec{e}_2 \cdot \vec{b}}{|\vec{b}|^2} \vec{b} \dots \frac{\vec{e}_n \cdot \vec{b}}{|\vec{b}|^2} \vec{b} \right]$$

kan vist: Hvis $|\vec{x}|=1$ så regner matrisen $\vec{x} \vec{x}^T$ ut projeksjonen ned på linja gjennom origo og $\vec{x}$.

Disse kalles projeksjonsmatriser

$$\begin{aligned} &= \left[\frac{b_1}{|\vec{b}|^2} \vec{b} \quad \frac{b_2}{|\vec{b}|^2} \vec{b} \dots \frac{b_n}{|\vec{b}|^2} \vec{b} \right] \\ &= \frac{\vec{b}}{|\vec{b}|} \left[\frac{b_1}{|\vec{b}|} \quad \frac{b_2}{|\vec{b}|} \dots \frac{b_n}{|\vec{b}|} \right] \\ &= \frac{\vec{b}}{|\vec{b}|} \left(\frac{\vec{b}}{|\vec{b}|} \right)^T \end{aligned}$$

Eksempel 2.14 La $\vec{F}$ være avbildningen som roterer en vinkel i $\mathbb{R}^2$ med θ



$$\begin{aligned} \text{Vi har } \vec{F} \begin{pmatrix} r \cos \alpha \\ r \sin \alpha \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} r \cos(\alpha + \theta) \\ r \sin(\alpha + \theta) \end{pmatrix} = r \begin{pmatrix} \cos \theta \cos \alpha - \sin \theta \sin \alpha \\ \sin \theta \cos \alpha + \cos \theta \sin \alpha \end{pmatrix} \\ &= r \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \cos \alpha \\ \sin \alpha \end{pmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix} \begin{pmatrix} r \cos \alpha \\ r \sin \alpha \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Det følger at $\vec{F}$ er lineær, med matrise

$$\begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix}$$

Plotting av polynomer

$x = \text{linspace}(0, 1, 100)$

$\text{plot}(x, x, x, x.^2, x, x.^3)$ (plotte $1, x, x^2$ mot hverandre
(3 plots))

Anta vi har polynomer av høyere grad

$$p_1(x) = c_0 + c_1 x + \dots + c_n x^n$$

og plottepunkter $(x_1, \dots, x_m)$. Vi får

$$p_1(x_1) = c_0 + c_1 x_1 + \dots + c_n x_1^n$$

$$p_1(x_2) = c_0 + c_1 x_2 + \dots + c_n x_2^n$$

$\vdots$

$$p_1(x_m) = c_0 + c_1 x_m + \dots + c_n x_m^n$$

Ved def. av matrisemultiplikasjon kan dette skrives

$$\begin{pmatrix} p_1(x_1) \\ p_1(x_2) \\ \vdots \\ p_1(x_m) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & x_1 & \dots & x_1^n \\ 1 & x_2 & \dots & x_2^n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & x_m & \dots & x_m^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_0 \\ c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix}$$

Kalles en Vandermondematrise.

Hvis vi har enda et polynom $p_2(x) = d_0 + d_1 x + \dots + d_n x^n$

$$\begin{pmatrix} p_2(x_1) \\ p_2(x_2) \\ \vdots \\ p_2(x_m) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & x_1 & \dots & x_1^n \\ 1 & x_2 & \dots & x_2^n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & x_m & \dots & x_m^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d_0 \\ d_1 \\ \vdots \\ d_n \end{pmatrix}$$

Ved definisjonen av matrisemultiplikasjon kan disse slås sammen:

$$\begin{pmatrix} p_1(x_1) & p_2(x_1) \\ p_1(x_2) & p_2(x_2) \\ \vdots & \vdots \\ p_1(x_m) & p_2(x_m) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & x_1 & \dots & x_1^n \\ 1 & x_2 & \dots & x_2^n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & x_m & \dots & x_m^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_0 & d_0 \\ c_1 & d_1 \\ \vdots & \vdots \\ c_n & d_n \end{pmatrix} \quad \begin{array}{l} \text{+ tilsvarende} \\ \text{hvis flere polynomer} \end{array}$$

Kode

$n=3$
 $x = linspace(0, 1, 100)';$

$V = x.^n(0:n)$

$p1 = [0; 1; 0; 0]$

$p2 = [0; 0; 1; 0]$

$p3 = [0; 0; 0; 1]$

$plot(x, V * [p1; p2; p3])$ evt. $plot(x, V * p1, x, V * p2, x, V * p3)$
 $legend('p-1', 'p-2', 'p-3')$

Dette er mer generelt.

Blokkmatriser

Vi skriver $\left(\begin{array}{c|c} A & B \\ \hline C & D \end{array} \right)$ for matrisen der komponentene

A, B, C, D er plassert over/hunder hverandre.

Dette kalles en blokkmatrise (streken adskiller blokkene)

I Matlab $[A \ B; C \ D]$

• A og B skal ha like mange rader

• C og D skal ha like mange rader

• Tilsvarende for søyler

Eksempel

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 3 & 3 & 3 \\ 3 & 3 & 3 \\ 3 & 3 & 3 \end{pmatrix}, D = \begin{pmatrix} 4 & 4 \\ 4 & 4 \\ 4 & 4 \end{pmatrix}$$

$$\text{Da er } \left(\begin{array}{c|c} A & B \\ \hline C & D \end{array} \right) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 2 & 2 \\ 3 & 3 & 3 & 4 & 4 \\ 3 & 3 & 3 & 4 & 4 \\ 3 & 3 & 3 & 4 & 4 \end{pmatrix}$$

$$A = [1 \ 1 \ 1; 1 \ 1 \ 1]$$

$$B = [2 \ 2; 2 \ 2]$$

$$C = [3 \ 3 \ 3; 3 \ 3 \ 3; 3 \ 3 \ 3]$$

$$D = [4 \ 4; 4 \ 4; 4 \ 4]$$

$$[A \ B; C \ D]$$

Produktet $\left[\begin{array}{c|c} A & B \\ \hline C & D \end{array} \right] \left[\begin{array}{c|c} E & F \\ \hline G & H \end{array} \right)$ gir mening hvis antallet søyler $A = \text{antallet rader } E$
+ ...

$$\text{Dette blir da } \begin{bmatrix} AE + BG & AF + BH \\ CE + DG & CF + DH \end{bmatrix}$$

$$[A \ B; C \ D] * [E \ F; G \ H]$$