

Fra sist: De Morgans lover sier at

$$(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$$

$$(A \cap B)^c = A^c \cup B^c$$

Bevis for den første:

Må vise:

$$1. (A \cup B)^c \subseteq A^c \cap B^c$$

$$2. (A \cup B)^c \supseteq A^c \cap B^c$$

1. Anta  $x \in (A \cup B)^c$

Da er  $x \notin A \cup B$

Da er  $x \notin A$ ,  $x \notin B$

Da er  $x \in A^c$ ,  $x \in B^c$

Da er  $x \in A^c \cap B^c$

2. Anta  $x \in A^c \cap B^c$

Da er  $x \in A^c$  og  $x \in B^c$

Da er  $x \notin A$  og  $x \notin B$

Da er  $x \notin A \cup B$

Da er  $x \in (A \cup B)^c$

Hvis  $x$  og  $y$  er objekter, så sier vi at  $(x, y)$  er et par med første komponent  $x$ , andre komponent  $y$ .

Mer generelt: Om  $x_1, \dots, x_n$  er objekter, så er  $(x_1, x_2, \dots, x_n)$  et "n-tupel" med første komponent  $x_1$ , andre komponent  $x_2$ , ....

Tupler: er ordnet, dvs.  $(2, 5) \neq (5, 2)$

kan ha like komponenter:  $(1, 2, 2, 3) \neq (1, 2, 3)$

Vi sier at  $(x_1, \dots, x_n)$  og  $(y_1, \dots, y_n)$  er like dersom

$$x_1 = y_1, x_2 = y_2, \dots, x_n = y_n$$

Hvis  $A$  og  $B$  er mengder, så er det kartesiske produktet

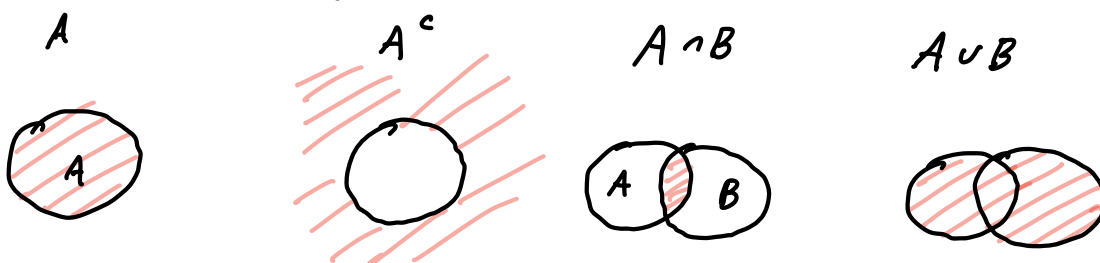
$$A \times B$$

definert ved  $A \times B = \{ (x, y) : x \in A, y \in B \}$

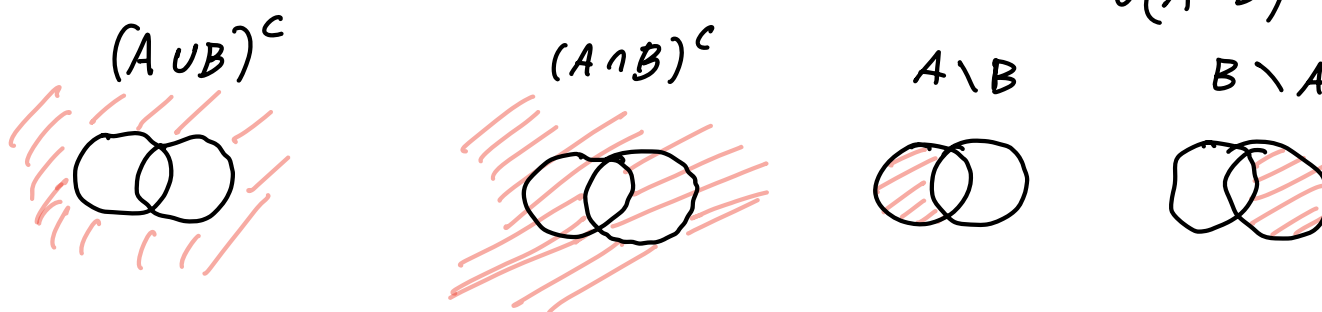
Hvis  $A_1, A_2, \dots$  er mengder, så defineres  $\times$  det kartesiske produktet

$$A_1 \times A_2 \times \dots \times A_n = \{(x_1, x_2, \dots, x_n) : x_i \in A_i, i=1, 2, \dots, n\}$$

Grafisk fremstilling:



$$\text{Hele "planet"} = (A \setminus B) \cup (B \setminus A) \cup (A \cap B) \cup (A \cup B)^c$$



Oppgave 2.11 Hvorfor er  $(A^c)^c = A$ ?

Vi må vise

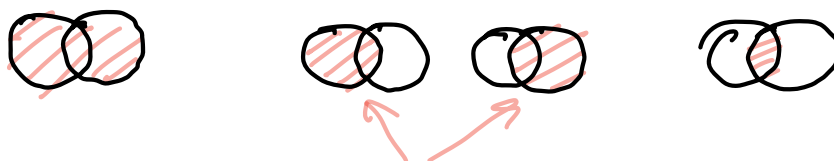
1.  $(A^c)^c \subseteq A$
2.  $(A^c)^c \supseteq A$

1. Anta  $x \in (A^c)^c$ . Da er  $x \notin A^c$ . Men da er  $x \in A$

2. Anta  $x \in A$ . Da er  $x \notin A^c$ . Men da er  $x \in (A^c)^c$ .

Oppgave: Anta  $A$  og  $B$  er endelige mengder.

Forklar at  $\#(A \cup B) = \#A + \#B - \#(A \cap B)$



$A \cap B$  blir telt to ganger, så må trekke

fra  $\#A \cap B$ , for at alt skal bli telt en gang.

$$\text{Vi har at } \#(A \cup B) = \#A \setminus B + \#B \setminus A + \#A \cap B$$

$$= \#A - \#A \cap B + \#B - \#A \cap B + \#A \cap B$$

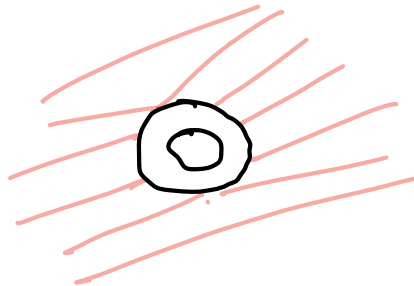
$$= \#A + \#B - \#A \cap B - \#A \cap B + \#A \cap B$$

$$= \#A + \#B - \#A \cap B.$$

$$\text{Merk: } A \subseteq B \Leftrightarrow A^c \supseteq B^c$$



$A^c$



$B^c$

### 3. Funksjoner

En funksjon fra en mengde A til en mengde B:

En operasjon som til ethvert objekt i A tildeles ett (og bare ett) objekt i mengden B.

"f er en funksjon fra A til B" skrives  $f: A \rightarrow B$

$f: A \rightarrow B$  kalles veldefinert hvis den faktisk er en funksjon.

Eksempler:

- $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = x^3$  er veldefinert.

- $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = \frac{1}{x}$  er ikke veldefinert ( $x=0$  tildeles ingen verdi)

- $f: \{0, 1, 2\} \rightarrow \{0, 1, 2\}$ , def. ved  $f(0)=2, f(2)=0, f(1)=1$ , er veldefinert.

- $f: \{0,1,2\} \rightarrow \{0,1,2\}$  definert ved  $f(0)=2, f(2)=0$  er ikke veldefinert ( $x=1$  tildeles ikke noe objekt).

$A$  kalles definisjonsområdet til  $f$ ,  $B$  verdiområdet  
domenet kodomenet.

### Noen funksjoner

Om  $A \subseteq B$  så er inklusionsfunksjonen  $i: A \rightarrow B$ ,  
definert ved at  $i(x) = x$  for alle  $x \in A$ .

Identitetsfunksjonen på en mengde  $A$ ,  $id: A \rightarrow A$ ,  
er definert ved  $id(x) = x$  for alle  $x \in A$ .  
skrives også  $id_A$

Noen ganger bruker vi  $\mapsto$  (pil mot høyre) til å  
representere funksjoner:

$f(x) = x^3$  for  $x \in \mathbb{R}$  skrives også  $x \mapsto x^3$  for  $x \in \mathbb{R}$

$f: A \rightarrow B$  kalles injektiv (eller  $1 \rightarrow 1$ , en til en) hvis,

for alle  $x, y \in A$  er slik at, om  $f(x) = f(y)$  så er  $x = y$

Altså:  $x \neq y \Rightarrow f(x) \neq f(y)$

Eksempel:  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = x^2$  er ikke injektiv  $\begin{pmatrix} 1 \rightarrow 1 \\ -1 \rightarrow 1 \end{pmatrix}$

$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = x^3$  er injektiv

$f: A \rightarrow B$  kalles surjektiv (eller på) hvis det for alle  $y \in B$   
finnes en  $x \in A$  s.a.  $f(x) = y$  ( $f$  treffer alle objekter i  $B$ )

$f: A \rightarrow B$  kalles bijektiv hvis den er både injektiv og surjektiv

Sammesom: For alle  $y \in B$  finnes en, og bare en,  $x \in A$  s.a.  $f(x) = y$ .

Eksempel: Med  $A = [-2, 2]$ ,  $B = [-8, 8]$ , så er  $f: x \rightarrow x^3$  bijektiv.

Hvis  $f: A \rightarrow B$ ,  $g: B \rightarrow C$ , så er komposisjonen av  $f$  og  $g$ , skrevet som  $g \circ f$ , funksjonen fra  $A$  til  $C$  definert ved

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)), \quad x \in A$$

Funksjonen  $f: A \rightarrow B$  kalles inverterbar dersom det finnes en funksjon  $g: B \rightarrow A$  slik at  $f(g(y)) = y$  (alle  $y \in B$ )  
 $g(f(x)) = x$  (alle  $x \in A$ )

Dette er det samme som at  $f \circ g = \text{id}_B$ ,  $g \circ f = \text{id}_A$

$g$  kalles da for inversfunksjonen til  $f$ , eller bare inversen til  $f$

Vi skriver og så  $g = f^{-1}$ .

Lemma Om  $f$  er inverterbar så har den kun en invers

Beweis: Hvis både  $g$  og  $h$  er inverser til  $f$ , så er, for alle  $y \in B$ ,

$$g(y) = g(f(h(y))) = \text{id}_A(h(y)) = h(y)$$

Dertov er  $g = h$ , og inversen er unik ■