

Fra i går: $f: A \rightarrow B$
domene $\rightarrow$ kodomene / verdimrådet
definisjonsområde, D_f

Verdimengden til f : $V_f = \{ f(x) : x \in A \}$ ($V_f \subseteq B$)

Hvordan finne inversfunksjonen til $f(x) = 4x - 7$, $x \in \mathbb{R}$?

Løsning:

$$y = 4x - 7$$
$$4x = y + 7$$
$$x = \frac{1}{4}y + \frac{7}{4}$$
$$g(y) = \frac{1}{4}y + \frac{7}{4}, y \in \mathbb{R}$$

Eksempel 3.4 Er $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ definert ved $f(x) = \begin{cases} 1, & x \text{ partall} \\ 2, & x \text{ oddetall} \\ 3, & x \text{ primtall} \end{cases}$

veldefinert?

Nei: $f(2)$ er både 1 og 3.
som også er primtall

For x oddetall $\downarrow$ så er $f(x)$ både 2 og 3.

$f(x)$ blir altså tildelt to objekter i verdimengden
 $\Downarrow$
ikke veldefinert.

4. Utsagnslogikk

Et utsagn: En setning som enten er sann eller usann
(har ingenting å si om du selv vet om den er sann eller ikke)

Eksempler utsagn:

$$3 + 2 = 5$$

$$1 + 1 = 3$$

Det finnes uendelig mange tall.

Jeg liker kjøtthaker.

Setninger som ikke er utsagn

$3+2$ kan ikke si om er sann/usann

$2n+1=7$ nei, sannhet avhenger av n .

Et predikat: En setning som avhenger av en eller flere variable.
For hvert valg av disse har vi et utsagn.

utsagn

$P: 3+2=6$

predikat spesifiserer hvilke verdier argumentet tar.

$Q(n): 2n+1=7$ for $n \in \mathbb{R}$

$Q(3)$ er sann, $Q(4)$ er usann.

Konnektiver: En operasjon på/mellom utsagn. Disse er:

$\neg$ negasjon

$\wedge$ og

$\vee$ eller

$\Rightarrow$ impliserer

$\Leftarrow$ følger fra / implisert av.

$\Leftrightarrow$ ekvivalent med

Negasjon: Anta P er et utsagn, så er $\neg P$ ("ikke P ", negasjonen av P)

Sannhetstabell

P	$\neg P$
S	U
U	S

"hvis P er sann, så er "ikke P " usann"

"hvis P er usann, så er "ikke P " sann"

merk: $\neg(\neg P) = P$ (dobbel negasjon)

P	$\neg P$	$\neg(\neg P)$
S	U	S
U	S	U

Like!

Og: Anta P og Q er utsagn. $P \wedge Q$ ("P og Q") er definert ved

P	Q	$P \wedge Q$
S	S	S
U	S	U
S	U	U
U	U	U

(når er P og Q begge sanne?)

hvis P er sann og Q usann, så er $P \wedge Q$ usann.

Eller: $P \vee Q$ ("P eller Q")

P	Q	$P \vee Q$
S	S	S
U	S	S
S	U	S
U	U	U

(når er minst en av P, Q sanne?)

Impliserer: Vi sier at $P \Rightarrow Q$ ("P impliserer Q")
dersom Q alltid er sann når P er sann
("Jeg har 1000 kr $\Rightarrow$ jeg har råd til å gå på kino")

Merk: Har også $\Leftarrow$ (implisert av)

$P \Rightarrow Q$ $Q \Leftarrow P$ betyr det samme.

$P \Rightarrow Q$ og $P \Leftarrow Q$ er ikke det samme!

Når er $P \Rightarrow Q$ ikke sant?

Dette er bare tilfelle når P er sann og Q usann.

Sannhetstabell for $\Rightarrow$ blir da:

P	Q	$P \Rightarrow Q$
S	S	S
U	S	S
S	U	U
U	U	S

Ekvivalent med: $P \Leftrightarrow Q$ (P ekvivalent med Q)

uttrykker at P og Q betyr akkurat det samme.

Samme som $(P \Rightarrow Q) \wedge (P \Leftarrow Q)$

P	Q	$P \Leftrightarrow Q$
S	S	S
U	S	U
S	U	U
U	U	S

De Morgans lover for utsagn P og Q er:

$$\neg(P \wedge Q) \Leftrightarrow (\neg P) \vee (\neg Q)$$

$$\neg(P \vee Q) \Leftrightarrow (\neg P) \wedge (\neg Q)$$

Sammenheng De Morgans for mengder

$$P \Leftrightarrow A$$

$$Q \Leftrightarrow B$$

$\neg \Leftrightarrow$ komplement

$$\wedge \Leftrightarrow \cap$$

$$\vee \Leftrightarrow \cup$$

$$(A \cap B)^c = A^c \cup B^c$$

Beweis for De Morgans lover ved sannhetstabel

P	Q	$P \wedge Q$	$\neg(P \wedge Q)$	$\neg P$	$\neg Q$	$(\neg P) \vee (\neg Q)$
S	S	S	U	U	U	U
U	S	U	S	S	U	S
S	U	U	S	U	S	S
U	U	U	S	S	S	S

Eksempel Hva er negasjonen av utsagnet

P: Jeg liker enten øl eller vin, men ikke saft.
og

Svar: La $Q(x)$ være predikatet

$Q(x)$: Jeg liker x

Da er:

$$P \Leftrightarrow (Q(\text{øl}) \vee Q(\text{vin})) \wedge (\neg Q(\text{saft}))$$

De Morgans lover: $\neg P \Leftrightarrow \neg(Q(\text{øl}) \vee Q(\text{vin})) \vee (\neg \neg Q(\text{saft}))$

$$\Leftrightarrow (\neg Q(\text{øl}) \wedge \neg Q(\text{vin})) \vee Q(\text{saft})$$

jeg liker hverken øl eller vin. Jeg liker saft

"Enten liker jeg saft, eller så liker jeg hverken øl eller vin."

Oppgave 4.11

De Morgan

$$\neg((\neg P \vee Q) \wedge (\neg Q \vee R)) \Leftrightarrow \neg(\neg P \vee Q) \vee \neg(\neg Q \vee R)$$

op1

op2

De Morgan

$$\Leftrightarrow (\neg \neg P \wedge \neg Q) \vee (\neg \neg Q \wedge \neg R)$$

$$\Leftrightarrow (P \wedge \neg Q) \vee (Q \wedge \neg R)$$

$P_{\text{sann}} \text{ og } Q_{\text{usann}}$

$Q_{\text{sann}} \text{ og } R_{\text{usann}}$

Utsagnet er sant $\Leftrightarrow P_{\text{sann}} \text{ og } Q_{\text{usann}} \text{ eller } Q_{\text{sann}}, R_{\text{usann}}.$