

Negasjon av kvantorer

La $P(x)$ være et predikat

$\forall x, P(x)$ sier "For alle x er $P(x)$ sann"

Negasjonen av dette sier "Det må finnes minst en x s.o. $P(x)$ ikke er sann":

$$\neg(\forall x, P(x)) \Leftrightarrow \exists x, \neg P(x)$$

På samme måte:

$\exists x, P(x)$ sier "Det finnes minst en x s.o. $P(x)$ er sann"

Negasjonen av dette sier "For alle x så er $P(x)$ usann":

$$\neg(\exists x, P(x)) \Leftrightarrow \forall x, \neg P(x)$$

Med andre ord: Ved negasjon til et utsagn med kvantorer:

1. bytt om $\exists$ og $\forall$
2. Erstatt predikatet $P(x)$ med sin negasjon.

Eksempel.

$$P: \forall^{\text{reelle}} \text{tall } x, \exists^{\text{reelle}} \text{tall } y, y > x$$

"For alle tall x finnes et tall som er større."

$$\neg P: \exists \text{tall } x, \forall \text{tall } y, y \leq x$$

"Det eksisterer et tall x s.o. for alle tall y er $y \leq x$."

Eksempel fra boka

$$P: \forall \text{hus } x, \exists \text{personer } y, y \text{ bor i } x \quad ("alle \text{ hus er bebodd}")$$

$$\neg P: \exists \text{hus } x, \forall \text{personer } y, y \text{ bor ikke i } x \quad ("finnes et ubebodd hus")$$

Eksempel: La $x_1, x_2, \dots, x_n, \dots \in \mathbb{R}$, og $x \in \mathbb{R}$

La $P: x_n \rightarrow x$ når $n \rightarrow \infty$

" x_n konvergerer mot x når $n \rightarrow \infty$ ".

Vi har $P \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geq N, |x_n - x| < \varepsilon$

$\neg P \Leftrightarrow \exists \varepsilon > 0, \forall N \in \mathbb{N}, \exists n \geq N, |x_n - x| \geq \varepsilon$.

"Det finnes en $\varepsilon > 0$ s.a. uikårlig langt ute i følgen, så finnes verdier x_n slik at $|x_n - x| \geq \varepsilon$."

Kap. 5 Bevissteknikk

Hvordan bli gode på å føre bevis?

(i) Les noen beviser

(ii) Legg det bort for en tid.

(iii) Prøv å rekonstruere det.

(iv) Ta en kikk på en fasit når du står fast.

Dette vil gå raskere etterhvert.

Teoremene våre har ofte formen:

1. Utsagn P er sant

2. Hvis P er sann så er og så Q sann

3. Hvis n er slik at $P(n)$ er sann, så er $Q(n)$ sann

$P \Rightarrow Q$

$P(n) \Rightarrow Q(n)$

$P(P(n))$ er antagelsen,

$Q(Q(n))$ er konklusjonen.

betingede utsagn.

Fremgangsmåter i beviser:

1. Skriv tydelig hva vi antar, hva vi vil konkludere.

2. Definer alle involverte begreper.

3. Fyll inn logiske argumenter som tar deg fra antagelse til konklusjon (steg for steg)

4. Renskriv beviset (skal være lettlest, klart, tydelig)

Fjern alt som er overflødig. Beviset skal starte med antagelse, ende med konklusjon.

Underveis vil du typiske hoppe mellom disse stegene.

Eksempel: Vis at om n er delelig med 4, så er n et partall.

1. Antagelse: $P(n)$: n er delelig med 4

Konklusjon: $Q(n)$: n er et partall.

2. Definisjon: La $n, p \in \mathbb{N}$. Da sier vi at n er delelig med p dersom det finnes $k \in \mathbb{N}$ s.a. $n = kp$.

Definisjon: Et partall er et tall som er delelig med 2

Går tilbake til 1.:

Antagelse: " n er delelig med 4": $\exists k \in \mathbb{N}, n = 4k$

Konklusjon: " n er delelig med 2": $\exists l \in \mathbb{N}, n = 2l$

3. $n = 4k = 2 \cdot 2k = 2 \cdot l$ der $l = 2k$

Derfor er $n = 2l$ der $l \in \mathbb{N}$, s.a. n er et partall.

4. Teorem Om $n \in \mathbb{N}$ er delelig med 4, så er n et partall

Bevis: Om n er delelig med 4, finnes det en $k \in \mathbb{N}$ s.a. $n = 4k$.

La $l = 2k$. Da er $n = 2l$. Siden $l \in \mathbb{N}$, så er n et partall ■

Kan generaliseres

Teorem La $p, q \in \mathbb{N}$. Om n er delelig med p , og p er delelig med q , så er også n delelig med q .

(Over: $p=4, q=2$)

Bevis: Om n er delelig med p så er $n = pk$, $k \in \mathbb{N}$.

Om p er delelig med q så er $p = ql$, $l \in \mathbb{N}$

Men da er $n = pk = q(k = q(k))$.

Siden $k \in \mathbb{N}$ så er n delelig med q ■

Beriset over er det som kalles direkte bevis,
der vi starter med en antagelse, utleder logiske konsekvenser,
til man står igjen med konklusjonen.

Teorem: La $n \in \mathbb{N}$. Om n er et oddetall, så er n^2 også et oddetall

Definisjon: n kalles et oddetall hvis det kan skrives
 $n = 2m + 1$, der $m \in \mathbb{N}_0$

Beris: Siden n er et oddetall skriver vi $n = 2m + 1$. Da er

$$n^2 = (2m + 1)^2 = 4m^2 + 4m + 1 = 2(\underbrace{2m^2 + 2m}_{\in \mathbb{N}_0}) + 1$$

Siden $2m^2 + 2m \in \mathbb{N}_0$, så er n^2 et oddetall ■