

Fra i går: Om n er et oddetall så er

$$n^2 = (2m+1)^2 = \dots = 2(2m^2+2m)+1$$

hvis $m \in \mathbb{N}$ så er $m^2 \in \mathbb{N}$ og, og $2m^2, 2m \in \mathbb{N}$.

Men da er $k = 2m^2 + 2m \in \mathbb{N}$ og.

Da er $n^2 = 2k+1$, slik at n^2 er et oddetall.

Et annet eksempel på direkte bevis:

Teorem: La $f: A \rightarrow B$. f er bijektiv hvis og bare hvis f er inverterbar

Bevis: $\Rightarrow$ Vi antar at f er bijektiv

Vi må vise at det finnes en funksjon $g: B \rightarrow A$ s.a.

$$f(g(y)) = y \quad \forall y \in B, \quad g(f(x)) = x \quad \forall x \in A$$

La $y \in B$. Definer $g(y) = x$, der x er den unike verdien i A s.a. $f(x) = y$.

siden bijektiv

g er da veldefinert på hele B , og

$$f(g(y)) = f(x) = y, \quad g(f(x)) = g(y) = x$$

f er inverterbar

$\Leftarrow$ Anta f er inverterbar. Vi må vise at f er bijektiv

Det finnes da en $g: B \rightarrow A$ s.a. $f(g(y)) = y$, $g(f(x)) = x$
 $\forall y \in B.$ $\forall x \in A$

Anta at $f(x_1) = f(x_2)$ der $x_1 \neq x_2$

Da er $g(f(x_1)) = g(f(x_2)) \rightarrow$ må ha $\neq$!
 $\parallel \quad \parallel$
 $x_1 \neq x_2$

Det følger at f er injektiv.

Anta $y \in B$. Da er $f(g(y)) = y$

Med $x = g(y)$ så er $f(x) = y$, slik at f er surjektiv.

Det følger at f er bijektiv

5.3 kontrapositivt bevis

Utsagnet $P \Rightarrow Q$ er ekvivalent med $\neg Q \Rightarrow \neg P$

Vi ser dette fra sannhetstabell:

P	Q	$P \Rightarrow Q$	$\neg Q$	$\neg P$	$\neg Q \Rightarrow \neg P$
S	S	S	V	V	S
V	S	S	V	S	S
S	V	V	S	V	V
V	V	S	S	S	S



Sagt annerledes:

$P \Rightarrow Q$ betyr Q er sann når P er sann

så hvis Q er usann må P også være usann

$$\neg Q \Rightarrow \neg P$$

$\neg Q \Rightarrow \neg P$ betyr $\neg P$ sann når $\neg Q$ sann

P usann når Q usann

så hvis P er sann så må Q være sann

Så $P \Rightarrow Q$.

Eksempel: Vis at hvis n^2 er et partall så er n også partall

$\underbrace{\hspace{10em}}_P \qquad \underbrace{\hspace{10em}}_Q$

$\neg Q \Rightarrow \neg P$ sier: n er et oddetall $\Rightarrow n^2$ er oddetall

(Følger fra $n = 2m+1$, $n^2 = (2m+1)^2 = 2(2m^2+2m)+1$
 $=$ oddetall.)

Eksempel La $x, y \in \mathbb{N}$. Vis at

hvis $\underbrace{xy \text{ ikke er delelig med } 2}_P$, så er hverken x eller y delelig med 2. Q

Kontrapositivt blir dette:

minst en av x, y er delelig med 2 ($\neg Q$)

$\Downarrow$

xy er delelig med 2 ($\neg P$)

Hvis x er delelig med 2, så er $x = 2k$ for en $k \in \mathbb{N}$

Da er $xy = 2ky$, som også er delelig med 2.

(beviset er tilsvarende hvis y er delelig med 2.)

Oppgave 5.6 a)

Hvis $\underbrace{3n+5 \text{ er et oddetall}}_P$, så er n et partall Q

$\neg Q$: n er et oddetall. Da er $n = 2m+1$ for en $m \in \mathbb{N}_0$

$$\begin{aligned} \text{Da er } 3n+5 &= 3(2m+1)+5 = 6m+3+5 = 6m+8 \\ &= 2(3m+4), \end{aligned}$$

som viser at $3n+5$ er et partall.

Siden $\neg P$ er at $3n+5$ er et partall,

så har vi at $\neg Q \Rightarrow \neg P$, slik at $P \Rightarrow Q$.

5.4 Motsigelsesbevis

Anta vi vil bevisse utsagnet P .

I et motsigelsesbevis antar vi $\neg P$, og viser at dette leder til en selvmotsigelse. Dermed må P være sann.

Eksempel: La P : $\sqrt{2}$ er et irrasjonalt tall.

Da er $\neg P$: $\sqrt{2}$ kan skrives som $\frac{p}{q}$, $p, q \in \mathbb{N}$.

Antar p og q ikke har felles faktorer (kan forkortes)

$$\sqrt{2} = \frac{p}{q} \Rightarrow 2 = \frac{p^2}{q^2} \Rightarrow p^2 = 2q^2 \Rightarrow p \text{ er et partall}$$

$p = 2k$
(p delelig med 2)

$$\Downarrow$$

$$4k^2 = 2q^2 \Rightarrow 2k^2 = q^2$$

$\Downarrow$
 q partall, q delelig med 2.

Men da har p og q 2 som felles faktor, en motigelse.

Derfor er P sann.

Eksempel: P : Det finnes uendelig mange primtall.

$\neg P$: Det finnes endelig mange primtall.

Kall disse $x_1 < x_2 < \dots < x_k$

Tallet $x_1 x_2 \dots x_k + 1$ er da ikke delelig med noen x_i :

$$\frac{x_1 x_2 \dots x_k + 1}{x_i} = x_1 x_2 \dots x_{i-1} x_{i+1} \dots x_k + \frac{1}{x_i}$$

Da er ikke $x_1 x_2 \dots x_k + 1$ delelig med noe tall

$\Rightarrow x_1 x_2 \dots x_k + 1$ er et primtall, som er en motsigelse.

Motsigelsesbevis for betingede utsagn ($P \Rightarrow Q$)

Vi har vist ved sannhetstabell at $\neg(P \Rightarrow Q) \Leftrightarrow P \wedge \neg Q$

Derfor: Start med å anta P sann og Q usann, P er sann, Q usann.
og utled en selvmodsigelse.

Eksempel: La $a, b \in \mathbb{R}$. Vis at

$$a \in \mathbb{Q}, ab \notin \mathbb{Q} \Rightarrow b \notin \mathbb{Q}$$

P

Q

motsigelses bevis:

P sann : $a \in \mathbb{Q}, ab \notin \mathbb{Q}$

Q usann : $b \in \mathbb{Q}$

$ab \in \mathbb{Q}$, som strider mot at $ab \notin \mathbb{Q}$

Det følger $P \Rightarrow Q$, siden $\neg(P \Rightarrow Q)$ ga en selvmotsigelse.

5.5 Induksjonsbevis

Disse beviser påstander av typen $\forall n \in \mathbb{N}, P(n)$,

der P er et predikat.

"Indeksmengden" er $\mathbb{N}$,
eller $(a, a+1, a+2, \dots)$

Eksempel: Vis at $\sum_{k=1}^n k = \frac{n(n+1)}{2}$ for $n \in \mathbb{N}$

Vi viser $\forall n \in \mathbb{N} P(n)$ ved å vise

$P(n)$

1. $P(1)$ (grunntilfellet)

2. $P(n) \Rightarrow P(n+1)$ for alle $n \in \mathbb{N}$.

Da er $P(2), P(3), \dots$ sann, o.s.v.
(induksjonssteget)

Grunntilfellet:

$P(1)$ sier at $\sum_{k=1}^1 k = \frac{1(1+1)}{2}$. Siden disse er like så er $P(1)$ sann.

Induksjonssteget: Anta $P(n)$ er sann, dvs. $\sum_{k=1}^n k = \frac{n(n+1)}{2}$. Da er

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{n+1} k &= \sum_{k=1}^n k + (n+1) \stackrel{P(n)}{=} \frac{n(n+1)}{2} + (n+1) = (n+1) \left(\frac{n}{2} + 1 \right) = (n+1) \left(\frac{n+2}{2} \right) \\ &= \frac{(n+1)((n+1)+1)}{2} \end{aligned}$$

Siden vi har likhet her så er $P(n+1)$ også sann.

