

Eksempel: Vis at alle oddetall som også er kvadrattall kan skrives på formen $8k+1$.

Vi definerer $P(n): \exists k \in \mathbb{N}_0, (2n+1)^2 = 8k+1$

Grunntilfellet: $P(0):$ $\left. \begin{array}{l} \text{VS: } 1 \\ \text{HS: } 8k+1 \end{array} \right\} \text{ blir like hvis vi setter } k=0.$

Derfor er $P(0)$ sann.

Induksjonssteget Vi antar at $P(n)$ er sann ($(2n+1)^2 = 8k+1$ for en $k \geq 0$),

Vi skal vise $P(n+1)$

$P(n+1)$ sier $(2(n+1)+1)^2 = 8r+1$ for en $r \geq 0$

$$\begin{aligned} & \parallel \\ (2n+3)^2 &= ((2n+1)+2)^2 = (2n+1)^2 + 4(2n+1) + 4 \\ &= (2n+1)^2 + 8n + 8 \\ & \quad \underbrace{8k+1}_{\text{delig med 8}} + 8n + 8 \\ &= 8(k+n+1) + 1 \end{aligned}$$

Lemma Hvis x og y er delig med 8, så er $x+y$ delig med 8.

Med $r=k+n+1$ så er $(2(n+1)+1)^2 = 8r+1$, slik at $P(n+1)$ er sann.

Dermed er $P(n)$ sann for alle $n \geq 0$.

Eksempel Vis at $1+3+\dots+(2n-1) = n^2$ for alle $n \in \mathbb{N}$

$$P(n): 1+3+\dots+(2n-1) = n^2$$

Grunntilfellet: $P(1)$ sier at $1 = 1^2$, som er sant

Induksjonssteget: Anta at $P(n)$ er sann.

$$P(n+1) \text{ sier: } 1 + 3 + \dots (2n-1) + (2n+1) = (n+1)^2.$$

$$VS: \underbrace{1 + 3 + \dots (2n-1)}_{n^2} + 2n+1 = n^2 + 2n+1 = (n+1)^2$$

$$HS: (n+1)^2$$

Siden $VS=HS$ så er $P(n+1)$ også sann, og derfor er $P(n)$ sann for alle $n \geq 1$.

Eksempel La $x \in \mathbb{R}$ være gitt. Vis at $|\sin(nx)| \leq n |\sin x| \quad n \in \mathbb{N}_0$

$$P(n): |\sin(nx)| \leq n |\sin x|$$

Grunntilfellet: $n=0$. Da er $VS=HS=0$, slik at $P(0)$ er sann.

Induksjonssteget: Anta at $P(n)$ er sann, der $n \geq 0$. Da er

$$\begin{aligned} |\sin((n+1)x)| &= |\sin(nx+x)| = |\sin(nx)\cos x + \cos(nx)\sin x| \\ &\stackrel{\text{trekantulikhets}}{\leq} |\sin(nx)| |\cos x| + |\cos(nx)| |\sin x| \\ &\leq |\sin(nx)| + |\sin x| \\ &\stackrel{P(n) \text{ er sann}}{\leq} n |\sin x| + |\sin x| = (n+1) |\sin x| \end{aligned}$$

Vi har vist at $|\sin((n+1)x)| \leq (n+1) |\sin x|$, slik at $P(n+1)$ er sann også. Dermed er $P(n)$ sann for alle $n \geq 0$.

I sterk induksjon erstattes induksjonssteget med

$$P(1) \wedge P(2) \wedge \dots \wedge P(n) \Rightarrow P(n+1)$$

"Hvis alle $P(1), P(2), \dots, P(n)$ er sanne, så er $P(n+1)$ sann.

Eksempel Ethvert naturlig tall kan skrives som en sum av (forskjellige) toerpotenser ($\sum_i a_i 2^i$, $a_i = 0$ eller 1)

$P(n)$: $1, \dots, 2^n - 1$ kan skrives på formen $\sum a_i 2^i$

Grunntilfellet: $n=1 \Rightarrow 2^n - 1 = 1$, og $2^0 = 1 \Rightarrow P(1)$ er sann

Induksjonssteget: Anta vi har vist $P(n)$. Vi må vite

$P(n+1)$: $1, \dots, 2^{n+1} - 1$ kan skrives på formen $\sum a_i 2^i$.

Siden $P(n)$ er sann, så er det nok å vise at

$\{2^n, 2^{n+1}, \dots, 2^{n+1} - 1\}$ kan skrives som $\sum a_i 2^i$

Hvis $k \in \{2^n, 2^{n+1}, \dots, 2^{n+1} - 1\}$ så kan vi skrive

$$k = 2^n + r, \text{ der } 0 \leq r \leq 2^n - 1$$

men da kan r skrives som $\sum_{i=0}^{n-1} a_i 2^i$ (på grunn av $P(n)$).

$k = 2^n + \sum_{i=0}^{n-1} a_i 2^i$, som er en sum av forskjellige
toerpotenser $\Rightarrow P(n+1)$ er sann.