

Forelesning 22. September

Litt repetisjon om matriser.

Starter på kap. 3 om Gausseliminasjon (kap. 3 i [1])

Kap. 4 og 5 i [1] foreleses for midtveis, men er ikke pensum til midtveis.

Matrisemultikasjon $m \times k \quad k \times n$

$$(AB)_{ij} = \sum_{r=1}^k a_{ir} b_{rj}$$

Hvis A $m \times k$, B $k \times l$, C $l \times n$, så er $(AB)C$ og $A(BC)$ definert, og

$$(AB)C_{ij} \stackrel{\text{def matrisemult}}{=} \sum_{s=1}^l (AB)_{is} C_{sj} = \sum_{s=1}^l \left(\sum_{r=1}^k a_{ir} b_{rs} \right) C_{sj} = \sum_{s=1}^l \sum_{r=1}^k a_{ir} b_{rs} C_{sj}$$
$$(A(BC))_{ij} = \dots = \sum_{r=1}^k \sum_{s=1}^l a_{ir} b_{rs} C_{sj}$$

Like siden summeringsrekkefølgen ikke spiller noen rolle.

En lineær avbildning fra $\mathbb{R}^n$ til $\mathbb{R}^m$:

$$1. \vec{F}(\vec{a}_1 + \vec{a}_2) = \vec{F}(\vec{a}_1) + \vec{F}(\vec{a}_2)$$

$$2. \vec{F}(c\vec{a}) = c\vec{F}(\vec{a})$$

Alle lineære avbildninger kan skrives på formen $\vec{F}(\vec{x}) = A\vec{x}$ der

$$A = (\vec{F}(\vec{e}_1), \vec{F}(\vec{e}_2), \dots, \vec{F}(\vec{e}_n)) \quad (\vec{e}_i \text{ har } i \text{ komponent } 1, \text{ nuller ellers})$$

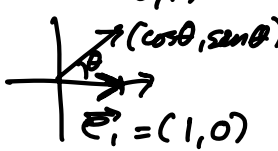
$\uparrow$
matrisen til $\vec{F}$

Eksempler: 1. $\vec{x} \rightarrow \text{proj}_{\vec{b}} \vec{x}$ er lineær

$$\text{Vi har } \text{proj}_{\vec{b}} \vec{e}_i = \frac{\vec{e}_i \cdot \vec{b}}{|\vec{b}|^2} \vec{b} = \frac{b_i}{|\vec{b}|^2} \vec{b}$$

$$\text{Matrisen blir: } \left(\frac{b_1}{|\vec{b}|^2} \vec{b} \quad \frac{b_2}{|\vec{b}|^2} \vec{b} \quad \dots \quad \frac{b_n}{|\vec{b}|^2} \vec{b} \right)$$

$$\stackrel{\text{Gitt mer regning}}{=} \dots = \frac{\vec{b}}{|\vec{b}|} \left(\frac{\vec{b}}{|\vec{b}|} \right)^T$$

$\vec{e}_2 = (0,1)$ 2. Rotasjon med vinkel θ i $\mathbb{R}^2$ er også lineær.
 Siden $\vec{e}_1 \rightarrow \begin{pmatrix} \cos \theta \\ \sin \theta \end{pmatrix}$, $\vec{e}_2 \rightarrow \begin{pmatrix} \cos(\theta + \frac{\pi}{2}) \\ \sin(\theta + \frac{\pi}{2}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\sin \theta \\ \cos \theta \end{pmatrix}$
 så blir matrisen $\begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$.

Kap. 3 Gausseliminasjon

Et generelt system med m likninger og n ukjente

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n &= b_2 \\ &\vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n &= b_m \end{aligned} \quad (*)$$

Gausseliminasjon løser (*) ved å eliminere variable fra venstre mot høyre.

- Når $x_1, \dots, x_k$ er eliminert, gå videre med å eliminere x_{k+1} .
1. Finn en likning der x_{k+1} bidrar (luts ingan, gå videre til x_{k+2})
 2. Flytt denne likningen opp. (kalles ledende ener)
 3. Skaler denne slik at det står 1 foran x_{k+1}
 4. Legg til multipler av denne til de siste likningene, slik at x_{k+1} blir borte der.

Gå deretter videre til x_{k+2} .

Eksempel 3.1

Del 1

$$\begin{aligned} -8x_2 + 3x_3 &= 6 \\ 4x_1 - 3x_2 + 2x_3 &= 8 \\ x_1 - 2x_2 + x_3 &= 3 \end{aligned}$$

flytt opp,
slipper å skalere.

$$\begin{aligned} x_1 - 2x_2 + x_3 &= 3 \\ 4x_1 - 3x_2 + 2x_3 &= 8 \\ -8x_2 + 3x_3 &= 6 \end{aligned}$$

eliminer x_1 ved hjelp av første likning.

(-4) ganget med første likning legges til andre likning.

$$II - 4I$$

$$x_2: -3 + 8 = 5$$

$$x_3: 2 - 4 = -2$$

$$HS \quad 8 - 12 = -4$$

$$x_1 - 2x_2 + x_3 = 3$$

$$5x_2 - 2x_3 = -4$$

$$-8x_2 + 3x_3 = 6$$

Gå videre til x_2 ,
skalere andre likning

$$x_1 - 2x_2 + x_3 = 3$$

$$x_2 - \frac{2}{5}x_3 = -\frac{4}{5}$$

$$-8x_2 + 3x_3 = 6$$

eliminer x_2 ved hjelp
av andre likning.

$$\text{III} + 8 \text{II}$$

$$x_3: 3 - \frac{16}{5} = -\frac{1}{5}$$

$$\text{HS}: 6 - \frac{32}{5} = -\frac{2}{5}$$

$$x_1 - 2x_2 + x_3 = 3$$

$$x_2 - \frac{2}{5}x_3 = -\frac{4}{5}$$

$$-\frac{1}{5}x_3 = -\frac{2}{5}$$

skalere tredje likning

$$x_3: -\frac{2}{5} + \frac{2}{5} = 0$$

$$\text{HS}: -\frac{4}{5} + \frac{4}{5} = 0$$

$$x_1 - 2x_2 + x_3 = 3$$

$$x_2 - \frac{2}{5}x_3 = -\frac{4}{5}$$

$$x_3 = 2$$

Legg til $\frac{2}{5}$ ganget
likning III i likning 2

$$\text{II} + \frac{2}{5} \text{III}$$

$$\text{I} - \text{III}$$

Systemet er nå på trappeform, som betyr

1. Hver likning er enten null eller har en ledende ener.
2. Hver likning begynner med minst en null mer enn likningen over.

Del 2

Vi har nå nullet ut elementene under diagonalen.
Fortsetter nå over diagonalen

$$x_1 - 2x_2 = 1$$

$$x_2 = 0$$

$$x_3 = 2$$

$$\text{I} + 2 \text{II}$$

$$\begin{array}{rcl} x_1 & & = 1 \\ & x_2 & = 0 \\ & & x_3 = 2 \end{array}$$

Vi har den unike løsningen $\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$

Systemet er nå på reduisert trappform, som betyr at

1. Er på trappform
2. bare nuller over de ledende enerne (del 2)

Variablene som har ledende enere kalles pivotvariable.
Posisjonen til en ledende ener kalles også for et pivotelement

Sett $A = \begin{pmatrix} 0 & -8 & 3 \\ 4 & -3 & 2 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix} 6 \\ 8 \\ 3 \end{pmatrix}$

$(A \ \vec{b})$ kalles den utvidede matrisen til systemet

pivotsøyle: søyle som inneholder et pivotelement.
her: $\{1, 2, 3\}$

pivotrad: rad som inneholder et pivotelement
her: $\{1, 2, 3\}$

Lar vi $\sim$ betegne operasjonene vi gjorde over,
så kan vi uttrykke det vi gjorde med den utvidede matrisen
som følger:

$$\begin{aligned} (A \ \vec{b}) &= \begin{pmatrix} 0 & -8 & 3 & 6 \\ 4 & -3 & 2 & 8 \\ 1 & -2 & 1 & 3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 3 \\ \textcircled{4} & -3 & 2 & 8 \\ 0 & -8 & 3 & 6 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 3 \\ 0 & 5 & -2 & -4 \\ 0 & -8 & 3 & 6 \end{pmatrix} \\ &\sim \dots \sim \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}}_{\text{reduert trappform}} \end{aligned}$$

Vanlig å indikere operasjonene vi gjorde:

1. $I \leftrightarrow III$ (rad 1 og 3 bytter plass)
2. $II - 4I$ (trekk fra fire ganger rad I i rad II)
3. $II \cdot (\frac{1}{5})$ (ganger rad 2 med $\frac{1}{5}$).

Det vi gjorde over kan da skrives som

$$\begin{pmatrix} 0 & -8 & 3 & 6 \\ 4 & -3 & 2 & 8 \\ 1 & -2 & 1 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow{I \leftrightarrow III} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 3 \\ 4 & -3 & 2 & 8 \\ 0 & -8 & 3 & 6 \end{pmatrix} \xrightarrow{II - 4I} \dots \xrightarrow{I + 2II} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

3 operasjoner ble brukt for å komme til redusert trappform

1. Legge til et multiplum av en likning til en annen.
2. Gange en likning med en konstant $\neq 0$
3. Radbytte / bytte om to likninger

Disse kalles for elementære operasjoner