

Fra sist gang: Definert elementære radoperasjoner på en matrise (radbytte, skalering av rad, legge til multiplum av en rad til en annen)

Vi sier at to matriser er radekvivalente hvis den ene kan fås fra den andre ved hjelp av elementære radoperasjoner.

$$\begin{pmatrix} 0 & -8 & 3 & 6 \\ 4 & -3 & 2 & 8 \\ 1 & -2 & 1 & 3 \end{pmatrix} \text{ er radekvivalent med } \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Proposisjon 3.2 Elementære radoperasjoner som matriser:

Anta B fremkommer fra A ved en elementær radoperasjon. Da er $B = EA$, der E er matrisen du får ved å anvende samme radoperasjon på I_m

En matrise som fremkommer ved en elementær radoperasjon på identitetsmatrisen kalles en elementær matrise.

$$E_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ svarer til radoperasjonen } \underline{I} + 2\underline{II}.$$

$$E_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \text{ svarer til radoperasjonen } \underline{III} \cdot 3$$

$$E_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \text{ svarer til } \underline{II} \leftrightarrow \underline{III}.$$

Radoperasjoner kan reverseres:

$$\begin{aligned}
 F_1 &= \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ svarer til } I - 2II \\
 F_2 &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} \end{pmatrix} \text{ svarer til } III \cdot \left(\frac{1}{3}\right) \\
 F_3 &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \text{ svarer til } II \leftrightarrow III
 \end{aligned}$$

reversering betyr:

$$\begin{aligned}
 F_1 E_1 &= I_m = E_1 F_1 \\
 F_2 E_2 &= I_m = E_2 F_2 \\
 F_3 E_3 &= I_m = E_3 F_3
 \end{aligned}$$

$F, E, A \Rightarrow m \times n$
 $\underbrace{\quad}_m \quad \underbrace{\quad}_m$
 $m \times m \quad m \times n$

Siden matriser kan bringes til redusert trappeform med radoperasjoner, så kan vi alltid skrive

$$\underset{\substack{\uparrow \\ \text{redusert trappeform}}}{C} = E_k \cdots E_2 E_1 A$$

$\uparrow$ elementære matriser.

Proposisjon 3.4

Hvis ett system fremkommer fra et annet ved hjelp av elementære radoperasjoner, så har de to systemene de samme løsningene

Følger fra at $Ax = b \Rightarrow EAx = Eb$

Eksempel 3.5 Et system med flere ukjente enn likninger.

$$\begin{aligned}
 x_1 + x_2 + x_3 &= 4 \\
 2x_1 - x_3 &= 2
 \end{aligned}$$

Utvidet matrise:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 4 \\ 2 & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{II - 2I} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 4 \\ 0 & -2 & -3 & -6 \end{pmatrix} \xrightarrow{II \cdot (-\frac{1}{2})} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & \frac{3}{2} & 3 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{I - II} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -\frac{1}{2} & 1 \\ 0 & 1 & \frac{3}{2} & 3 \end{pmatrix} \text{ redusert trappeform.}$$

Sier: $x_1 - \frac{1}{2}x_3 = 1$
 $x_2 + \frac{3}{2}x_3 = 3 \Rightarrow \vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 + \frac{1}{2}x_3 \\ 3 - \frac{3}{2}x_3 \\ x_3 \end{pmatrix}$
 $= \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} + x_3 \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ -\frac{3}{2} \\ 1 \end{pmatrix}$

- Vi ser:
1. Det er uendelig mange løsninger har ledende enen
 2. x_1 og x_2 er pivotvariable, og kan udtrykkes ved x_3
 3. x_3 er ikke pivotvariabel (ingen ledende enen), kan sættes til hvad som helst.
 x_3 kaldes derfor en fri variabel

Eksempel 3.6

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 &= 2 \\ 3x_1 + 3x_2 &= 5 \end{aligned}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 3 & 3 & 5 \end{pmatrix} \xrightarrow{II - 3I} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow{II \cdot (-1)} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{I - 2II} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Sier $x_1 + x_2 = 0$
 $0 \cdot x_1 + 0 \cdot x_2 = 1 \Rightarrow 0 = 1$

Dette er umulig, så vi har ingen løsninger.

Siste søjle er pivot-søjle.

Eksempel 3.1, 3.5 og 3.6 har illustreret 3 muligheder:

Et system kan ha

1. En unik løsning (kan pivotvariable, ikke pivotelement i sidste søjle)
2. Uendelig mange løsninger (Fri variabel, ikke pivotelement)

i siste søyle.

3. Ingen løsning. Pivotelement i siste søyle.

Proposisjon 3.7

Alle systemer kan bringes til redusert trappeform, og det er 3 muligheter:

1. Systemet har ingen løsning (siste søyle er den pivotsøyle).
2. Systemet har løsning(er) (siste søyle er ikke pivotsøyle)
Da har vi også at
 - (a) Når vi har frie variable har vi uendelig mange løsninger.
 - (b) Når vi ikke har noen frie variable: Vi har unik løsning.

Teorem 3.8 Hvis A er $n \times n$, så er følgende ekvivalent:

1. A er radekvivalent med I_n
2. $A\vec{x} = \vec{0}$ har kun løsningen $\vec{x} = \vec{0}$
3. $A\vec{x} = \vec{b}$ har entydig løsning for alle høyresider $\vec{b}$
4. A kan skrives som et produkt av elementære matriser

Bevis: $1. \Rightarrow 3. : A \sim I_n \Rightarrow (A \ \vec{b}) \sim (I_n \ \vec{b})$.

Dette sier:

$$\begin{aligned} x_1 &= b_1 \\ x_2 &= b_2 \\ &\vdots \\ x_n &= b_n \end{aligned}$$

slik at vi har en unik løsning.

$3. \Rightarrow 2. : \text{Er opplagt}$

2. $\Rightarrow$ 1. : Løs $A\vec{x} = \vec{0}$ ved å radredusere $(A \mid \vec{0})$.
Siden bare en løsning: Ingen frie variable.

$\Downarrow$
alle søyler i A er pivotsøyler
Siden A er kvadratisk:

alle rader i A er pivotrader,
men da er $A \sim I_n$

1. $\Rightarrow$ 4. : Siden $A \sim I_n$ så er $I_n = E_k \cdots E_1 A$

La F_i være den elementære matrisen
for den revers operasjonen til E_i

Gang med F_k til venstre:

$$F_k = F_k E_k \cdots E_1 A$$

$\Downarrow$

$$F_k = E_{k-1} \cdots E_1 A$$

Fortsetter slik:

$$F_1 F_2 \cdots F_k = A$$

$\Downarrow$

A er produkt av elementære matriser.

4. $\Rightarrow$ 1. Hvis $A = F_1 \cdots F_k$ så er $I_n = E_k \cdots E_1 A$,
som sier at $A \sim I_n$. ■

3.2 Simultan løsning av systemer

Vi vil løse systemer $A\vec{x}_1 = \vec{b}_1$, $A\vec{x}_2 = \vec{b}_2$

(forskjellige høyresider, samme koeffisientmatrise)

La C være den reduserte trappeformen til A ,
anvend samme radoperasjoner på $\vec{b}_1$ og $\vec{b}_2$:

$$(A \ \vec{b}_1 \ \vec{b}_2) \sim (C \ \tilde{b}_1 \ \tilde{b}_2)$$

Vi kan lese ut løsningene fra begge systemer fra dette.

Eksempel 3.10

I eks 3.1 løste vi systemet $A\vec{x} = \vec{b}_1$, der $\vec{b}_1 = \begin{pmatrix} 6 \\ 8 \\ 3 \end{pmatrix}$

La oss simultant løse $A\vec{x} = \vec{b}_2$, der $\vec{b}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 8 \\ 2 \end{pmatrix}$:

$$(A \ \vec{b}_1 \ \vec{b}_2) \sim \begin{pmatrix} 0 & -8 & 3 & 6 & 1 \\ 4 & -3 & 2 & 8 & 8 \\ 1 & -2 & 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{I \leftrightarrow III} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 3 & 2 \\ 4 & -3 & 2 & 8 & 8 \\ 0 & -8 & 3 & 6 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{II - 4I} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 3 & 2 \\ 0 & 5 & -2 & -4 & 0 \\ 0 & -8 & 3 & 6 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{II \cdot (\frac{1}{5})} \dots \xrightarrow{I + 2II} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 5 \end{pmatrix}$$

Det følger at $\begin{cases} A\vec{x} = \vec{b}_1 \text{ har løsningen } \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \\ A\vec{x} = \vec{b}_2 \text{ har løsningen } \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 5 \end{pmatrix} \end{cases}$