

Frasist gang: Visste + theorem 3.8:

$$A \sim I_n$$

$$\Downarrow$$

$$A\vec{x} = \vec{0} \text{ har } \vec{x} = \vec{0} \text{ som unik løsning}$$

$$\Downarrow$$

$$A\vec{x} = \vec{b} \text{ har unik løsning for alle h yresidor } \vec{b}$$

$\Downarrow$
A kan skrives som et produkt av elementære matriser.

skal utvide denne med enda en ekvivalens

Lemma Hvis A tilfredsstill r 1-4 i theorem 3.8

$\Downarrow$
finnes en matrise B s.a. $AB = I_n$

elementære matriser

B vis $\Rightarrow$ Vi har at $A = E_k \dots E_1$. La F_i være de reverse operasjonene

Da  r

$$E_k \dots E_1 F_1 \dots F_k = I_n$$

slik at $AB = I_n$ med $B = F_1 \dots F_k$.

$\Leftarrow$ Anta $AB = I_n$

anta at $B\vec{x} = \vec{0}$ for en $\vec{x} \neq \vec{0}$. Da  r $AB\vec{x} = \vec{0}$,
som strider mot at $AB = I_n$. B tilfredsstill r da 1-4,
s.a. B år et produkt av elementære matriser $F_1 \dots F_k$.

Men da år $A = E_k \dots E_1$ s der $AB = I_n$

$\Downarrow$
A tilfredsstill r 1-4.

Når $AB = I_n$ h yreinvert
vi sier B år en $BA = I_n$ venstreinvert til A

Når A har en h yreinvert så har også A en venstreinvert.
disse inversene år like, og unike

B vis: $AB = I_n \Rightarrow$ Vi kan skrive $A = E_k \dots E_1$ (elementære)
 $B = F_1 \dots F_k$

$BA = F_1 \dots F_k E_k \dots E_1 = I_n \Rightarrow B$ år også venstreinvert
unikhet følger og

Vi skriver A^{-1} for den unike høyre/venstreinverse

Vi sier også at A er inverterbar

(90)

Noen egenskaper: $A^{-1}A = I_n \Rightarrow (A^{-1})^{-1} = A$

Vi har også $(SA)^{-1} = S^{-1}A^{-1}$

Teorem 4.3 (utvidelse av teorem 3.8) Følgende er ekvivalent:

1. $A \sim I_n$
2. $Ax=0$ har kun løsningen $x=0$
3. $Ax=b$ har en entydig løsning for alle b
4. A kan skrives som et produkt av elementære matriser
5. A er inverterbar

Vi har også $A = F_1 \cdots F_k \Rightarrow A^{-1} = E_k \cdots E_1$

Hvordan regne ut A^{-1} ?

proposisjon 4.4. Anta A er inverterbar. Den reduserte trappformen til $[A \ I_n]$ er $[I_n \ A^{-1}]$

Så når du radreduserer $(A \ I_n)$ finner du spesifikt A^{-1}

Beweis: Sett $A = F_1 \cdots F_k$

$$\text{Da er } E_k \cdots E_1 (A \ I_n) = (I_n \underbrace{E_k \cdots E_1}_{= A^{-1}})$$

Når vi radreduserer $(A \ I_n)$ simultant løser vi $Ax_i = e_i$

Eksp 4.5 Invers matrise til $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 1 & 4 & 1 \\ 2 & 4 & 2 \end{pmatrix}$:

$$(A \ I_n) = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 3 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 4 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow{I \leftrightarrow II} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 4 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 4 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right)$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{4} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{4} \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -\frac{1}{2} & \frac{5}{4} \end{array} \right)$$

$$E_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} E_2 =$$

$$\text{Vi leses ut: } A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{4} \\ 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{4} \\ -1 & -\frac{1}{2} & \frac{5}{4} \end{pmatrix}$$

$\text{inv}(A)$ i matlab

$A = \text{sym}(A)$, symbolisk.

eventuelt

Eks 4.6 Vi ser på $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 1 & 4 & 1 \\ 2 & 4 & 2 \end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix} 19 \\ 21 \\ 26 \end{pmatrix}$

(41)

I stedet for å reducere $(A \ b)$ kan vi regne ut

$$x = A^{-1}b = \begin{pmatrix} 1 & -1/2 & -1/4 \\ 0 & 1/2 & -1/4 \\ -1 & -1/2 & 5/4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 19 \\ 21 \\ 26 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 19 - 21/2 - 13/2 \\ 21/2 - 13/2 \\ -19 - 21/2 + 65/2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Eksempler på inverterbare matriser:

Vandermondematriser

Fouriermatrisen

} hopp over

Kap-5 Lineær uavhengighet og basiser

42

La $\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_n \in \mathbb{R}^m$, og $c_1, \dots, c_n$ skalarer. Da kalles

$c_1 \vec{a}_1 + \dots + c_n \vec{a}_n$
for en lineær kombinasjon av $\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_n$

Samlingen av alle lineære kombinasjoner av $\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_n$ kalles
for spennet av $\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_n$, skrevet $Sp(\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_n)$.

Hvis $Sp(\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_n) = \mathbb{R}^m$ sier vi at vektorene utspenner $\mathbb{R}^m$.

Vi sier at $\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_n$ er lineært uavhengige hvis enhver $\vec{b} \in Sp(\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_n)$
kan skrives som en lineær kombinasjon av $\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_n$ på en entydig måte.

For å vise lineær uavhengighet bruker vi ofte

proposisjon 5.1 $\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_n$ er lineært uavhengige hvis og bare hvis

$$c_1 \vec{a}_1 + \dots + c_n \vec{a}_n = \vec{0} \quad (*)$$

impliserer at $c_1 = \dots = c_n = 0$

(*) kalles en lineær uavhengighetsrelasjon

Dette kan også skrives $A\vec{c} = \vec{0}$, der $A = (\vec{a}_1 \vec{a}_2 \dots \vec{a}_n)$ matrisen med $\vec{a}_i$ som søyler

Beweis: $\Rightarrow$: hvis lineært uavhengige så har

$c_1 \vec{a}_1 + \dots + c_n \vec{a}_n = \vec{0}$ den unike løsningen $c_1 = \dots = c_n = 0$

$\Leftarrow$: Anta kontraposittivt at $\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_n$ ikke er lineært uavhengige.

Da finnes en $\vec{b}$ i spennet s-a.

$$\left. \begin{aligned} \vec{b} &= c_1 \vec{a}_1 + \dots + c_n \vec{a}_n \\ \vec{b} &= d_1 \vec{a}_1 + \dots + d_n \vec{a}_n \end{aligned} \right\} (c_1, \dots, c_n) \neq (d_1, \dots, d_n)$$

Trekk fra hverandre:

$$\vec{0} = (c_1 - d_1) \vec{a}_1 + \dots + (c_n - d_n) \vec{a}_n \quad (\text{en av } (c_i - d_i) \neq 0)$$

Som gir et moteksempel på $c_1 \vec{a}_1 + \dots + c_n \vec{a}_n = \vec{0} \Rightarrow c_1 = \dots = c_n = 0$

Lineær uavhengighets relasjoner bevares ved elementære radoperasjoner:

La E være elementærmatrise. Da har vi at $A \times \vec{x} = \vec{0} \Leftrightarrow E A \vec{x} = \vec{0}$ (E er invertibel)
elementær radoperasjon

1. $\vec{b}$ en lineær kombinasjon av $\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_n$

$$\Downarrow$$

Finnes $x_1, \dots, x_n$ s.d. $x_1 \vec{a}_1 + \dots + x_n \vec{a}_n = \vec{b}$

$$\Downarrow$$

$A\vec{x} = \vec{b}$ har en løsning ($A = (\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_n)$)

$\Downarrow$
Siste søyle i $(A \ \vec{b})$ er ikke en pivotsøyle.

2. $\vec{b}$ kan skrives som lineær kombinasjon av $\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_n$ på en entydig måte krever i tillegg at alle søylene i A er pivotsøyle.

3. At $\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_n$ utspenner $\mathbb{R}^m$ er det samme som at $A\vec{x} = \vec{b}$ alltid har en løsning, som er det samme som at alle radene i A er pivotrader (da kan siste søyle i $(A \ \vec{b})$ aldri bli en pivotsøyle).

4. I en reduert trappetform er pivotsøylene lineært uavhengige, og de andre søylene kan uttrykkes ved disse.

Siden radoperasjoner bevarer lineære avhengighetsrelasjoner mellom søyer, så gjelder også for selve matrisen at

pivotsøylene er lineært uavhengige, og at de andre søylene kan uttrykkes ved disse

Proposisjon 5.3

1. Hvis $\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_n$ utspenner $\mathbb{R}^m$ så er $n \geq m$

2. Hvis $\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_n$ er lineært uavhengige så er $n \leq m$.

Beweis: $\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_n$ utspenner $\mathbb{R}^m$:

$\Downarrow$
alleradene er pivotrader, slik at:

$$m = \text{antall rader} = \text{antall pivotrader} = \text{antall pivotsøyer} \leq \text{antall søyer} = n$$

$\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_n$ er lineært uavhengige

$\Downarrow$
alle søylene i A er pivotsøyle,

$$n = \text{antall søyer} = \text{antall pivotsøyer} = \text{antall pivotrader} \leq \text{antall rader} = m$$

En basis for $\mathbb{R}^m$ er et sæt med lineært uafhængige vektorer som udspænder $\mathbb{R}^m$. En slik basis må da ha m vektorer.
 Det er klart at $\vec{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \vec{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \dots, \vec{e}_m = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$
 er en basis for $\mathbb{R}^m$. Kalles E , eller standard basisen

Proposisjon 5.4 (teoremet for inverterbare matriser, igjen!)

Følgende er ekvivalent når A er en $n \times n$ -matrise.

1. $A \sim I_n$
2. $A\vec{x} = \vec{0}$ har kun løsningen $\vec{x} = \vec{0}$
3. $A\vec{x} = \vec{b}$ har entydig løsning for alle $\vec{b}$
4. A kan skrives som et produkt av elementære matriser
5. A er inverterbar
6. Spøylene i A danner en basis for $\mathbb{R}^n$

Bævis: 6. er det samme som at alle rader og søyler i A har pivotelementer, som er det samme som at $A \sim I_n$ ■

Eksempel 5.5

$$\vec{a}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \vec{a}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} \quad \vec{a}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \vec{a}_4 = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$$

Vi radreduserer

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & -2 \\ 2 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 0 & 4 \end{pmatrix} \xrightarrow{I \leftrightarrow III} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 4 \\ 2 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & -2 \end{pmatrix} \xrightarrow{II - 2I} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 4 \\ 0 & -3 & 2 & -5 \\ 0 & 1 & 1 & -2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 5 & -11 \end{pmatrix}$$

Ser at alle radene blir pivotrader, slik at vektorene utspenner $\mathbb{R}^3$.
 De tre første søyler er pivotsøyler, og er derfor lineært uafhængige.
 Siste søyle er ikke pivotsøyle, og kan derfor skrives som en lineær kombinasjon av de tre første (pivotsøylene)

Vet fra før: 4 vektorer i $\mathbb{R}^3$ kan ikke være lineært uafhængige

Siden $(\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3)$ er både lineært uafhængige og utspenner $\mathbb{R}^3$, så er de en basis for $\mathbb{R}^3$.

Hvordan utvide et sæt med lineært uafhængige vektorer til en basis?

1. Bring $A = (\vec{a}_1 \dots \vec{a}_n)$ på redusert trappetorm
2. Siden $\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_n$ ikke er en basis, så finnes en rad uten pivotelement
 Legg til søyler som har pivotelement i disse radene
3. Vi har nå pivotelement i hver rad/søyle. Radreduser baklengs

Eksempel 5.6

(45)

La oss utsette $\vec{a}_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\vec{a}_2 = \begin{pmatrix} 6 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$ til en basis for $\mathbb{R}^3$:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 6 \\ 2 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow{I \leftrightarrow III} \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & -1 \\ 3 & 6 \end{pmatrix} \xrightarrow{II-2I} \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & -7 \\ 3 & 6 \end{pmatrix} \xrightarrow{III-3I} \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & -7 \\ 0 & -3 \end{pmatrix} \xrightarrow{II \cdot (-\frac{1}{7})} \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \\ 0 & -3 \end{pmatrix} \xrightarrow{III+3II} \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Viktig å skrive ned alle radoperasjonene! Kan stoppe ved trappetform.
Siste rad er ikke pivotrad. Sett inn pivotelement her, og radreduser baklengs:

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{III-3II} \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{II \cdot (-7)} \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 0 & -7 & 0 \\ 0 & -3 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{III+3II} \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 0 & -7 & 0 \\ 3 & 6 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{II+2I} \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \\ 3 & 6 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{I \leftrightarrow III} \begin{pmatrix} 3 & 6 & 1 \\ 2 & -1 & 0 \\ 1 & 3 & 0 \end{pmatrix}$$

Vi kan få en basis for $\mathbb{R}^3$ ved å legge til $\vec{a}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

5.1 Underrom

Med et underrom av $\mathbb{R}^m$ mener vi en mengde $U \subseteq \mathbb{R}^m$ s.o.

1. Hvis $\vec{u}_1, \vec{u}_2 \in U$ så er $\vec{u}_1 + \vec{u}_2 \in U$
2. Hvis $\vec{u} \in U$ så er også $c\vec{u} \in U$ for alle skalarer c .

- $\mathbb{R}^m$ er et underrom spesielt.
- $Sp(\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_n)$ er et underrom (Oppgave 5). spesielt er

Søylerommet og radrommet til en matrise A underrom.

Spennet av søylene i A spennet av rader i A.
(Col A) (Row A)

- $Nul(A)$, nullrommet til matrisen A , består av alle vektorer $\vec{x}$ s.o. $A\vec{x} = \vec{0}$.

Detter er et underrom siden

1. $\vec{u}_1, \vec{u}_2 \in Nul A \Rightarrow A\vec{u}_1 = A\vec{u}_2 = \vec{0} \Rightarrow A(\vec{u}_1 + \vec{u}_2) = A\vec{u}_1 + A\vec{u}_2 = \vec{0} + \vec{0} = \vec{0} \Rightarrow \vec{u}_1 + \vec{u}_2 \in Nul A$
2. $\vec{u} \in Nul A \Rightarrow A\vec{u} = \vec{0} \Rightarrow A(c\vec{u}) = c(A\vec{u}) = c\vec{0} = \vec{0} \Rightarrow c\vec{u} \in Nul A$.

En basis for et underrom er et sett med lineært uavhengige vektorer som utspanner U .

U har tidligere vist:

- pivotradene i A er en basis for $Row(A)$
- pivotsøylene i A er en basis for $Col(A)$.

En basis for et underrom kan ikke ha flere enn n elementer

Eksempel 5.8 Finn radrom, søylarom, nullrom for $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & 3 & -1 \\ 4 & -3 & 11 \end{pmatrix}$. (46)

Løsning: Radreducer: $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & 3 & -1 \\ 4 & -3 & 11 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 2 & 1 & 3 \\ 4 & -3 & 11 \end{pmatrix} \dots \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

De to første radene i red. trappetform er pivotrader, så $(1, 0, 2)$ og $(0, 1, -1)$ er en basis for $\text{Row}(A)$.

De to første søylene er pivotsøyle s.o. $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}$ og $\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -3 \end{pmatrix}$ er basis for $\text{Col}(A)$.

Nullrommet: $A\vec{x} = \vec{0}$: Fra red. trappetform ser vi at:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_3 = 0 \\ x_2 - x_3 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = -2x_3 \\ x_2 = x_3 \end{cases}$$

en vektor i nullrommet: $\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2x_3 \\ x_3 \\ x_3 \end{pmatrix} = x_3 \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Det følger at $\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ er en basis for nullrommet.

Følger fra eksempel: Alle nullrom kan skrives som et spenn av vektorer.

og: Alle underrom kan skrives som nullrom (oppgave)

Alle spenn er underrom;

Spenn, underrom, og nullrom er det samme!

Skal bruke senere: Alle underrom har en ortogonal basis. (hopper over beviset).

Proposisjon 5.10 Alle basiser for et gitt underrom har like mange elementer

Bevis: Anta at $\text{Sp}(u_1, \dots, u_n) = \text{Sp}(w_1, \dots, w_k)$ der $n > k$, og u 'ene er lin uavh, w 'ene lin uavh. Definer

$$F(c_1, c_2, \dots, c_n) = (d_1, d_2, \dots, d_k)$$

$$\text{Når } c_1 u_1 + \dots + c_n u_n = d_1 w_1 + \dots + d_k w_k$$

F er definert på hele $\mathbb{R}^n$, og er veldefinert, $1 \rightarrow 1$, og linear.

F er derfor gitt ved en $k \times n$ -matrise.

Siden $n > k$: Minst en søyle kan ikke ha pivotelement.

Men da har vi en lineær avhengighetsrelasjon:

$x_1 \vec{a}_1 + \dots + x_n \vec{a}_n = \vec{0}$
 mellom søylene i A , slik at $F(\vec{x}) = A\vec{x} = \vec{0}$ for en $\vec{x} \neq \vec{0}$, som strider mot at F er $1 \rightarrow 1$.

Antall vektorer i en basis for et underrom kalles dimensjonen til rommet.

(47)

dimensjonen + radrom/søylerom til en matrise = antall pivotelementer i den reduserte trappeformen.

Denne felles dimensjonen kalles også for rangen til matrisen.

Eksempel 5.11 Matriser med rang 1.

La $\vec{a}, \vec{b}$ være søylevektorer. Vi har at

$$\vec{a} \vec{b}^T = \begin{pmatrix} a_1 b_1 & a_1 b_2 & \dots & a_1 b_n \\ a_2 b_1 & a_2 b_2 & \dots & a_2 b_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_m b_1 & a_m b_2 & \dots & a_m b_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 \vec{b}^T \\ a_2 \vec{b}^T \\ \vdots \\ a_m \vec{b}^T \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \vec{a} & b_2 \vec{a} & \dots & b_n \vec{a} \end{pmatrix}$$

Derfor: $\{\vec{a}\}$ er en basis for søylerommet til A , $\{\vec{b}^T\}$ er en basis for radrommet til A . } begge rom har dimensjon 1.

$\vec{a} \vec{b}^T$ har derfor rang 1. Alle rang-1 matriser kan skrives på denne formen.

$\vec{a} \vec{b}^T$ kan reduseres til $\begin{pmatrix} \vec{b}^T \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$, slik at det er $n-1$ frie variable.
 $\dim \text{Nul}(\vec{a} \vec{b}^T) = n-1$

rang 1-matriser er nyttige byggeklosser, mer om senere

Proposisjon 5.12 La A være $m \times n$. Da er $\text{rang}(A) + \dim(\text{Nul}(A)) = n$

Eksempel 5.8 : $\text{rang } A = 2$, $\dim \text{Nul } A = 1$, $n = 3$ $2 + 1 = 3$

Eksempel 5.11 : $\text{rang } A = 1$, $\dim \text{Nul } A = n-1$, $1 + n-1 = n$

Beris: Følger fra at $\dim(\text{Nul}(A)) =$ antall frie variable.

$\text{rang}(A) =$ antall pivotsøyler,

og at alle søyler gir opphav til fri variabel, eller er pivotsøyle.

Til slutt:

48

proposisjon 5.13 : Den reduserte trappformen er unik

Beris: Anta A kan reduseres til to forskjellige reduserte trappformer C_1 og C_2 .

Viser først: C_1 og C_2 har samme ledende enere

hvis ikke finnes en søyleindeks k s.a.

- søyle $1, \dots, k-1$ har ledende enere både i C_1 og C_2
- søyle k har ledende ener i C_1 , men ikke i C_2

Da kan søyle k i C_1 ikke uttrykkes med søyle $1, \dots, k-1$ i C_1 ,
men søyle k i C_2 kan uttrykkes med søyle $1, \dots, k-1$ i C_2 .
Dette strider mot at C_1 og C_2 har de samme avhengighets-
relasjonene mellom søylene.

C_1 og C_2 har ^{de} samme ledende enene

Søylene med ledende enere er da like. De kommer i posisjon $1, 2, 3, \dots$

De andre søylene kan skrives som lineære kombinasjoner
av søyler med ledende enere på en entydig måte
Siden C_1 og C_2 har de samme avhengighetsrelasjonene,
og siden de har de samme søylene med ledende enere, så må
de resterende søylene i C_1 og C_2 også være like

$\parallel$

$$C_1 = C_2$$

$\parallel$

redusert trappform er unik

hoppe over beris.