

Kap. 5 : "Lineær algebra og numeriske metoder"

Fra før midtvejs:

- Lineær uafhængighed. Speun
- Lineært uafhængige søyler $\leftrightarrow$ pivotsøyler
- Basis. Inverterbarhet $\leftrightarrow$ søylene er en basis for $\mathbb{R}^n$

Eksempel 5.5 Hvordan finner vi en basis for søylerommet til en matrise?

$$A = (\vec{a}_1 \ \vec{a}_2 \ \vec{a}_3 \ \vec{a}_4) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & -2 \\ 2 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 0 & 4 \end{pmatrix} \sim \dots \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 5 & -11 \end{pmatrix}$$

de tre første søyler er lin uafhængige.
(pivotsøyler), og en basis.

Hvordan utvide et sett med lineært uafhængige vektorer $\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_n$ til en basis for $\mathbb{R}^m$? ($m > n$)

1. Bring $A = (\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_n)$ på (redusert) trappeform
2. Hvis $\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_n$ ikke er en basis for $\mathbb{R}^m$, så finnes det en rad uten pivotelement.
Legg til søyler i A slik at alle rader har pivotelement.
3. Den nye matrisen har pivotelement i hver rad/søyle, slik at søylene er en basis for $\mathbb{R}^m$.

Radredusere baklengs

$$(\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_n) \rightarrow (\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_n, \underbrace{\vec{a}_{n+1}, \dots, \vec{a}_m}_{\text{nye søyler s.o. } (\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_m) \text{ er en basis for } \mathbb{R}^m})$$

Eksempel 5.6 Utvid $\vec{a}_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\vec{a}_2 = \begin{pmatrix} 6 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$ til en basis for $\mathbb{R}^3$

Løsning: 1. Rad reduser:

$$\begin{pmatrix} 3 & 6 \\ 2 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{I} \leftrightarrow \text{III}} \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & -1 \\ 3 & 6 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{II} - 2\text{I}} \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & -7 \\ 3 & 6 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{III} - 3\text{I}} \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & -7 \\ 0 & -3 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{II} \cdot (-\frac{1}{7})} \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \\ 0 & -3 \end{pmatrix}$$

$\text{III} + 3\text{II} \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, som er på trappeform.

2. Tredje rad har ikke pivotelement, legger til søyle med pivotelement der

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

3. Radreduser baklengs:

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{III} - 3\text{II}} \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{II} \cdot (-1)} \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & -3 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{III} + 3\text{I}} \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 3 & 6 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{II} + 2\text{I}} \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \\ 3 & 6 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{I} - \text{III}} \begin{pmatrix} 3 & 6 & 1 \\ 2 & -1 & 0 \\ 1 & 3 & 0 \end{pmatrix}$$

$\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3$

Vi får en basis for $\mathbb{R}^3$ ved å legge til $\vec{a}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

Basisen blir $\left\{ \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 6 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$

$U \subseteq \mathbb{R}^m$ kalles et underrom hvis

1. $\vec{u}_1, \vec{u}_2 \in U \Rightarrow \vec{u}_1 + \vec{u}_2 \in U$
2. $\vec{u} \in U \Rightarrow c\vec{u} \in U$ (c skalar).

Spesielle underrom: $\text{Sp}(\{\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_n\})$, radrom, søylerom, nullrom
Row A Col A Nul A

Finne basis for $\text{Sp}(\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_n)$: Radreduser $(\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_n)$, pivotsøylene utgjør basis.

Finne basis for

$$\text{Nul } A = \{ \vec{x} : A\vec{x} = \vec{0} \} : \text{Radreduser } (A \mid \vec{0})$$

Eksempel 5.8: Med $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & 3 & -1 \\ 4 & -3 & 11 \end{pmatrix}$

$$\text{Row } A = \text{Sp}((2 \ 1 \ 3), (1 \ 3 \ -1), (4 \ -3 \ 11))$$

$$\text{Col } A = \text{Sp}\left(\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 11 \end{pmatrix}\right)$$

Vi har her: $A \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ to pivotsøyler. opprinnelige søyler
 $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3$ 11 $\begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -3 \end{pmatrix}$ en basis for col A.

(1 0 2) og (0 1 -1) er en basis for radrommet.
søyler i den radreduserte matrisen.

Nullrommet: Radene i $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ sier at $x_1 + 2x_3 = 0 \Rightarrow x_1 = -2x_3$
 $x_2 - x_3 = 0 \Rightarrow x_2 = x_3$

Derfor: $A\vec{x} = \vec{0} \Leftrightarrow \vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2x_3 \\ x_3 \\ x_3 \end{pmatrix} = x_3 \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

Derfor er $\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ en basis for $\text{Nul } A$.

Mer generelt er $\dim(\text{Nul } A) = \text{antall frie variable etter radreduksjon}$.

Nullrommet til A: $\{ \vec{x} : x_1 \vec{a}_1 + \dots + x_n \vec{a}_n = \vec{0} \}$

Hvis x_i er en fri variabel:

$x_k + c_i x_i + \dots + c_r x_r = 0$
pivotvariabel frie var. frie var.

sett alle andre frie variable (bortsett fra x_i) til 0:

$x_i \begin{pmatrix} -c_i \\ -d_i \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \rightarrow \text{rad } k$

Skal bruke senere: Alle underrom har også en ortogonal basis:

$\{ \vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_n \}$ er ortogonal hvis $\vec{a}_i \cdot \vec{a}_j = 0$ ($i \neq j$).

Proposisjon 5.10 Alle basiser for et gitt underrom har like mange elementer.

(Hopper over beviset)

Antall vektorer i en basis for underrommet Rolles for dimensjonen til rommet.

Siden $\dim \text{Col } A = \# \text{ pivots\pyle} = \# \text{ pivotelementer}$
 $= \# \text{ pivotrader} = \dim \text{Row } A$,

så har $\text{Row}(A)$ og $\text{Col}(A)$ samme dimensjon. Denne kalles for rangen til A ($\text{rang}(A)$).

Matrisen A i eksempel 5.8 har rang 2.

Eksempel 5.11 (matriser med rang 1)

Hvis $\vec{a} \in \mathbb{R}^m$, $\vec{b} \in \mathbb{R}^n$, $\vec{a}, \vec{b} \neq \vec{0}$, søylevektorer.:

$$\vec{a} \vec{b}^T = \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_m \end{pmatrix} (b_1 \ b_2 \cdots b_n) = \begin{pmatrix} a_1 b_1 & a_1 b_2 & \cdots & a_1 b_n \\ a_2 b_1 & a_2 b_2 & \cdots & a_2 b_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_m b_1 & a_m b_2 & \cdots & a_m b_n \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} a_1 \vec{b}^T \\ a_2 \vec{b}^T \\ \vdots \\ a_m \vec{b}^T \end{pmatrix}$$

Vi ser at $\text{Row}(\vec{a} \vec{b}^T) = \text{Sp}(\vec{b}^T)$

$$= \begin{pmatrix} b_1 \vec{a} & b_2 \vec{a} & \cdots & b_n \vec{a} \end{pmatrix} \quad \text{Vi ser at } \text{Col}(\vec{a} \vec{b}^T) = \text{Sp}(\vec{a})$$

Derfor er $\text{rang}(\vec{a} \vec{b}^T) = 1$.

$$\text{Nul}(\vec{a} \vec{b}^T) : \{ \vec{x} : \vec{a} \vec{b}^T \vec{x} = \vec{0} \}$$

$$\text{radreduser } \vec{a} \vec{b}^T \text{ til } \begin{pmatrix} b_1 & b_2 & 0 & \cdots & b_n \\ & & \vdots & & \\ & & & & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} 1 \text{ pivots\pyle} \\ n-1 \text{ frie variable.} \end{matrix}$$

$$\text{Derfor er } \dim(\text{Nul } \vec{a} \vec{b}^T) = n-1$$

Her: $\text{rang}(A) + \dim \text{Nul}(A) = 1 + n-1 = n$

Ekse. 5.8: $\text{rang}(A) + \dim \text{Nul}(A) = 2 + 1 = n = 3$

Dette er prop. 5.12: Hvis A er $m \times n$ så er

$$\text{rang}(A) + \dim(\text{Nul}(A)) = n$$