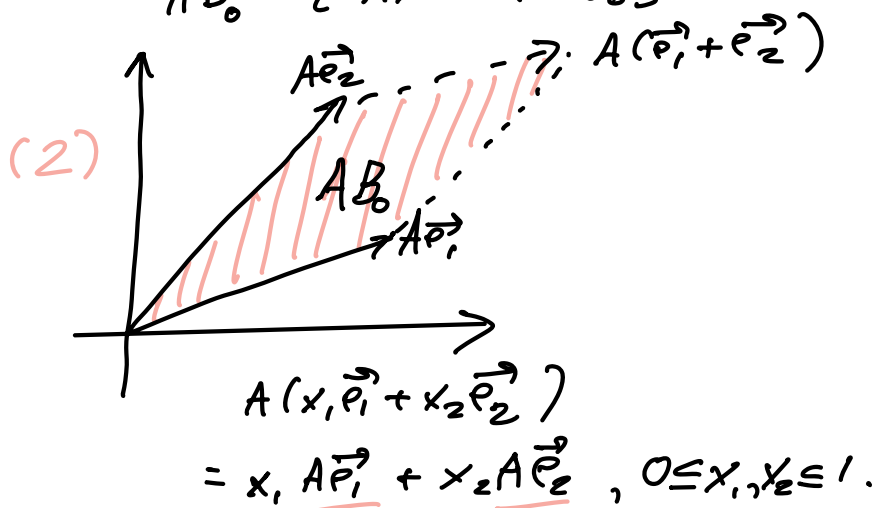
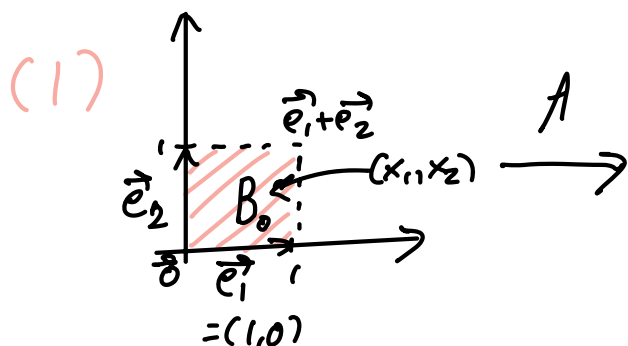


Kap. 6 Determinanter

La A være en 2×2 -matrise, La $B_0 = \{ \vec{x} : 0 \leq x_1, x_2 \leq 1 \}$

$$AB_0 = \{ A\vec{x} : \vec{x} \in B_0 \}$$



Vi har to arealer: Arealet til B i (1)

Arealet til AB_0 i (2)

Tenk på determinanten til A , skrevet $\det(A)$, som

forstørrelsesfaktor for disse arealene:

($A(\cdot)$ betegner areal).

$$A(AB_0) = \det(A) A(B_0)$$

Tilsvarende for $n=3$ og $n>3$ (må da definere volumer i $\mathbb{R}^n$, $n>3$)

Sek. 6.1 Den kompliserte definisjonen av determinanten.

Anta A er $n \times n$. Determinanten til A , $\det(A)$, defineres rekursivt ved

1. Determinanten til en 1×1 -matrise er a_{11}

2. Determinanten til en $n \times n$ -matrise er definert ved determinantene til $(n-1) \times (n-1)$ submatriser ved:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} - a_{12} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n3} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} + \dots$$

andremåten å skrive en determinanter på.

Utelatt søyle 1, rad 1 i A

Utelatt søyle 2, rad 1 i A

Utelatt søyle n, rad 1 i A.

$$+ (-1)^{n+1} a_{1n} \begin{vmatrix} a_{21} & \dots & a_{2(n-1)} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{n(n-1)} \end{vmatrix}$$

Ser med en gang: Hvis A starter med en nullrad, så er $\det(A) = 0$

Hvis A har en annen nullrad, så er også $\det(A) = 0$

1 formel: Hvis $A^{(ij)}$ er $(n-1) \times (n-1)$ submatrisen der rad i og søyle j i A er utelatt, så er

$$\det(A) = \sum_{j=1}^n (-1)^{i+j} a_{ij} \det(A^{(ij)})$$

kalles minorer

Determinanten til en 2×2 -matrise

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} \end{vmatrix} - a_{12} \begin{vmatrix} a_{21} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

determinant

For en 3×3 -matrise:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

= ...

Eksempel

$$\begin{vmatrix} -1 & 3 & 2 \\ 0 & -4 & 4 \\ -7 & 2 & 1 \end{vmatrix} = (-1) \begin{vmatrix} -4 & 4 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} - 3 \begin{vmatrix} 0 & 4 \\ -7 & 1 \end{vmatrix} + 2 \begin{vmatrix} 0 & -4 \\ -7 & 2 \end{vmatrix} \\ = (-1)(-4 \cdot 1 - 4 \cdot 2) - 3(0 \cdot 1 + 4 \cdot 7) + 2(0 \cdot 2 - (-4) \cdot (-7)) \\ = -(-4 - 8) - 3 \cdot 28 - 2 \cdot 28 \\ = 12 - 84 - 56 = \underline{\underline{-128}}$$

I boka viser vi at $\begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & 4 & 2 \\ 3 & 1 & -1 \end{vmatrix} = -38$,

mens $\det(A)$ i Matlab regnes ut til -38.0000 . Hvorfor?

Søk 6.2 Egenskaper til determinanten

Proposisjon 6.5 Anta A $n \times n$. Vi har at

1. Hvis B fremkommer fra A ved et radbytte, så er $\det B = -\det A$
2. Hvis B fremkommer fra A ved å gange rad i A med s , så er $\det B = s \det A$
3. Hvis B fremkommer fra A ved å legge et multiplum av en rad til en annen, så er $\det B = \det A$.

Bevissskisse for 1.: Tar for oss bytte av rad 1 og rad 2.

Gjør to rekursjoner av determinanten, uttrykker da determinanten ved hjelp av "underdeterminanter" der rad 1, 2, og søyle i, j er utelatt. La D_{ij} fremkomme ved å fjerne rad 1, 2, søyle i, j :

$$\det A = \sum \cdots D_{ij} \leftarrow \text{minorer}$$

$$\det B = \sum \cdots D_{ij}$$

Regning og sammenligning av disse to uttrykkene gir at $\det B = -\det A$. ■

For determinanter til elementære matriser (E):

$$\det E = \begin{cases} -1 & \text{Hvis } E \text{ er et radbytte} \\ s & \text{Hvis } E \text{ ganger en rad med } s \\ 1 & \text{Hvis } E \text{ legger til et multiplum av en rad} \\ & \text{til en annen} \end{cases}$$

Dette følger fra Proposisjon 6.5: $A = I_n$, $B = E = EA$, og $\det I_n = 1$

Så: En elementær radoperasjon endrer determinanten med en faktor som er determinanten til den elementære matrisen.

Proposisjon 6.8: Hvis A, B er $n \times n$, så er $\det(AB) = \det A \det B$

Beris: Vi kan skrive

$$C = F_k \cdots F_1 A \Rightarrow A = E_1 \cdots E_k C$$

↑
reduert trappiform A

$A = E_1 \cdots E_k C$, $B = F_1 \cdots F_l D$, der C og D er de reduserte trappiformene til A og B .

Anta $C = D = I_n$, slik at $A = E_1 \cdots E_k$, $B = F_1 \cdots F_l$

Vi får:

$$\begin{aligned} \det(AB) &= \det(E_1 \cdots E_k F_1 \cdots F_l) = \underbrace{\det E_1 \det E_2 \cdots \det E_k}_{\det A} \det(F_1 \cdots F_l) \\ &= \det(E_1 \cdots E_k) \det(F_1 \cdots F_l) \\ &= \det A \det B \end{aligned}$$

■

I boka viser vi at $\det(AB) = \det A \det B = 0$ hvis enten A eller B ikke er inverterbare.

Proposisjon 6.4 Determinanten til en øvre/nedre-triangular matrise er lik produktet av diagonalelementene

Bævis: Vi ser bare på dette for A nedre-triangular.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & \dots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & & & \\ a_{n1} & & & & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & 0 & \dots & 0 \\ a_{32} & a_{33} & \dots & 0 \\ \vdots & & & \\ a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} + 0 \dots + 0$$

$$= a_{11} a_{22} \begin{vmatrix} a_{33} & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & & \\ a_{n3} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11} \dots a_n$$

også triangulære.