

Fra i går:

1. Vi fant determinantene til elementære matriser (1,5,-1)
2. Viste at $\det(AB) = \det A \det B$ for alle $n \times n$ -matriser
3. Determinanten til en triangulær matrise er lik produktet av diagonalelementene.

Eksempel: Vi viste at $\begin{vmatrix} -1 & 3 & 2 \\ 0 & -4 & 4 \\ -7 & 2 & 1 \end{vmatrix} = -128$ ved hjelp av definisjonen.

La oss vise dette ved Gausseliminasjon også:

Vi radreduserer:

$$\begin{pmatrix} -1 & 3 & 2 \\ 0 & -4 & 4 \\ -7 & 2 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[E_1]{\text{III} - 7\text{I}} \begin{pmatrix} -1 & 3 & 2 \\ 0 & -4 & 4 \\ 0 & -19 & -13 \end{pmatrix} \xrightarrow[E_2]{\text{II} \cdot (-\frac{1}{4})} \begin{pmatrix} -1 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & -19 & -13 \end{pmatrix} \xrightarrow[E_3]{\text{III} + 19\text{II}} \begin{pmatrix} -1 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -32 \end{pmatrix} \xrightarrow{C}$$

$$C = E_3 E_2 E_1 A$$

↓ determinanter

$$\det(C) = \det E_3 \det E_2 \det E_1 \det A$$

$$(-1) \cdot 1 \cdot (-32) = 32 = 1 \cdot \left(-\frac{1}{4}\right) \cdot 1 \cdot \det A$$

$$32 = -\frac{1}{4} \det A$$

$$\underline{-128 = \det A}$$

Fra $\det(AB) = \det A \det B$ følger at $\det A \neq 0 \Leftrightarrow A \sim I_n$

Proposisjon 6.10: Endelig versjon av teoremet for inverterbare matriser:

Følgende er ekvivalent for $A \ n \times n$.

1. $A \sim I_n$
2. $A\vec{x} = \vec{0}$ har kun løsningen $\vec{x} = \vec{0}$
3. $A\vec{x} = \vec{b}$ har entydig løsning for alle høyresider $\vec{b}$
4. A kan skrives som et produkt av elementære matriser.

5. A er inverterbar
6. Søylene i A danner en basis for $\mathbb{R}^n$
7. $\det A \neq 0$

Proposisjon 6.7 og 6.12: Determinanten kan også utvikles langs en vilkårlig søyle/rad:

$$\det A = \sum_{j=1}^n (-1)^{i+j} a_{ij} \det(A^{(ij)})$$

$$= \sum_{i=1}^n (-1)^{i+j} a_{ij} \det(A^{(ij)})$$

Følger fra denne at $\det A = \det A^T$.

Fortegnsskjema for $(-1)^{i+j}$:

$$\begin{pmatrix} + & - & + & - & \dots \\ - & + & - & + & \dots \\ + & - & + & - & \dots \\ - & + & - & + & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}$$

Tips: Utvikle determinanten langs en rad/søyle med mange nuller.

Eksempel:

$$\begin{vmatrix} -1 & 3 & 2 \\ 0 & -4 & 4 \\ -7 & 2 & 1 \end{vmatrix} = (-1) \begin{vmatrix} -4 & 4 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} - 0 + (-7) \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ -4 & 4 \end{vmatrix}$$

$$= -(-4 - 8) - 7(12 + 8)$$

$$= 12 - 140 = \underline{-128}$$

6.3 Vektorproduktet og geometrisk tolkning av determinanten

Setter vi $\vec{b} = (\det A^{(11)}, -\det A^{(12)}, \dots, (-1)^{n+1} \det A^{(1n)})$

så kan definisjonen av determinant skrives

$$\vec{a}_1 \cdot \vec{b} = \underline{a_{11} \det A^{(11)}} - \underline{a_{12} \det A^{(12)}} + \dots$$

der $\vec{a}_1$ er første rad i A .

For $n=3$ har vi spesielt

$$\vec{b} = (\det A^{(11)}, -\det(A^{(12)}), \det(A^{(13)}))$$

$$= \left(\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}, -\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} \right)$$

Dette er kun avhengig av $\vec{a}_2$ og $\vec{a}_3$ (andre og tredje rad i A),

og kalles for vektorproduktet av $\vec{a}_2$ og $\vec{a}_3$,

skrevet $\vec{a}_2 \times \vec{a}_3$

Annen notasjon:

definisjon.

$$\begin{vmatrix} \vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \vec{e}_1 - \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} \vec{e}_2 + \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} \vec{e}_3$$

Eksempel Med $\vec{a}_2 = (1, 3, 2)$, $\vec{a}_3 = (2, -1, 3)$ får vi

$$\begin{aligned} \vec{a}_2 \times \vec{a}_3 &= \begin{vmatrix} \vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3 \\ 1 & 3 & 2 \\ 2 & -1 & 3 \end{vmatrix} = \vec{e}_1 \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} - \vec{e}_2 \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} + \vec{e}_3 \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} \\ &= (9+2)\vec{e}_1 - (3-4)\vec{e}_2 + (-1-6)\vec{e}_3 \end{aligned}$$

$$= 11\vec{e}_1 + \vec{e}_2 - 7\vec{e}_3 = (11, 1, -7)$$

Regnes ut med kommandoen `cross` i matlab/python.