

1 bokq viser vi

Proposisjon 6.17 (tilfellet $n=3$)

1. $\vec{a}_2 \times \vec{a}_3$ står ortogonalt på $\vec{a}_2$ og $\vec{a}_3$
2. $\vec{a}_2 \times \vec{a}_3$ har lengde lik arealet til parallelogrammet utspent av $\vec{a}_2$ og $\vec{a}_3$
3. Volumet til parallellepipedet utspent av $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3$ er lik $|\vec{a}_1 \cdot (\vec{a}_2 \times \vec{a}_3)|$

Tolkning: høyde $\cdot$ grunnflate

Merk: Både $\vec{a}_2 \times \vec{a}_3$ og $-(\vec{a}_2 \times \vec{a}_3)$ står ortogonalt på $\vec{a}_2$ og $\vec{a}_3$.
 $\vec{a}_2 \times \vec{a}_3$ er den av de to som oppfyller høyrehåndregelen

Oppgave 3: Hva er matrisen til $\vec{y} \xrightarrow{T} \vec{x} \times \vec{y}$
 $(\begin{smallmatrix} x_1 & x_3 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix})$ ^{gitt}

Løsning: $\vec{e}_1 \xrightarrow{T} \vec{x} \times \vec{e}_1 = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = \vec{i} \cdot -\vec{j}(-x_3) + \vec{k}(-x_2) = (0, x_3, -x_2)$

$$\vec{e}_2 \xrightarrow{T} \vec{x} \times \vec{e}_2 = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = \vec{i}(-x_3) + \vec{k}(x_1) = (-x_3, 0, x_1)$$

$$\vec{e}_3 \xrightarrow{T} \vec{x} \times \vec{e}_3 = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \vec{i} \cdot x_2 - \vec{j}(x_1) = (x_2, -x_1, 0)$$

$$\text{Matrisen: } (T(\vec{e}_1) \ T(\vec{e}_2) \ T(\vec{e}_3)) = \begin{pmatrix} 0 & -x_3 & x_2 \\ x_3 & 0 & -x_1 \\ -x_2 & x_1 & 0 \end{pmatrix}$$

Kap. 7 Egenverdier / egenvektorer

La A være $n \times n$.

λ kalles en egenverdi for A hvis det finnes en

$$\vec{x} \neq \vec{0} \in \mathbb{R}^n \text{ slik at } A\vec{x} = \lambda\vec{x}$$

$\vec{x}$ kalles da en egenvektor (tilhørende A)

$$\lambda \text{ er en egenverdi} \Leftrightarrow (A - \lambda I)\vec{x} = \vec{0} \text{ for en } \vec{x} \neq \vec{0}$$

$\Downarrow$

$A - \lambda I$ er ikke inverterbar

$\Downarrow$

$$\det(A - \lambda I) = 0$$

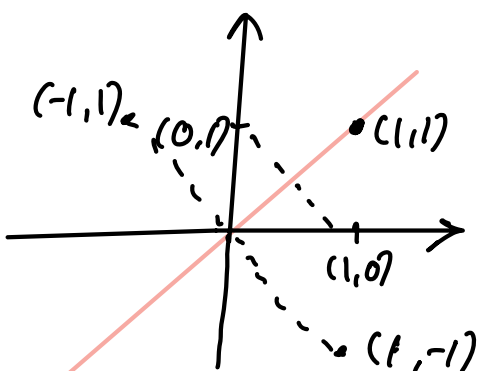
kalles den karakteristiske likningen til A

Anvender vi definisjonen av determinanten på $\lambda I - A$ får vi et n 'te grads polynom i λ , også kalt det karakteristiske polynom til A .

egenverdier: nullpunkter i $\det(A - \lambda I) = 0$

egenvektorer: Finnes ved å løse $(A - \lambda I)\vec{x} = \vec{0}$.

Eksempel: Se på den lineære avbildningen i $\mathbb{R}^2$ som speiler om linja $y = x$.



$$\vec{e}_1 \rightarrow \vec{e}_2$$

$$\vec{e}_2 \rightarrow \vec{e}_1$$

$$\begin{aligned} \text{matrisen: } (T(\vec{e}_1) \ T(\vec{e}_2)) &= (\vec{e}_2 \ \vec{e}_1) \\ &= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

ser at $T \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} = (-1) \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$, så er $\lambda = -1$ en egenverdi
for A , med $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ som

tilhørende egenvektor.
 $T \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, så $\lambda = 1$ er også egenverdi,
 $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ tilhørende egenvektor.

Karakteristisk likning: $\det(A - \lambda I_2)$

$$= \begin{vmatrix} 0-\lambda & 1 \\ 1 & 0-\lambda \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -\lambda & 1 \\ 1 & -\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 1 = 0$$

$\Downarrow$

$$\lambda_1 = -1, \lambda_2 = 1$$

Egenvektor for $\lambda_1 = -1$: $A - \lambda_1 I_2 = A + I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow x_1 + x_2 = 0$
 $\Downarrow$
 $x_1 = -x_2$

$$\text{egenvektor: } \vec{x}_1 = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x_2 \\ x_2 \end{pmatrix} = x_2 \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

generell egenvektor

$\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ er en spesiell egenvektor.

Egenvektor for $\lambda_2 = 1$: $A - \lambda_2 I_2 = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow x_1 - x_2 = 0$
 $\Downarrow$

spesiell egenvektor: $x_1 = x_2$

$$\text{egenvektor: } \vec{x}_2 = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_2 \\ x_2 \end{pmatrix} = x_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

generell egenvektor

Vi ser at vi fant alle egenvektorene over.

Eksamen MA1120 2017. La $A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$

Vis at $\vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ er en egenvektor for A , og find de andre egenvektorerne / værdierne også.

Løsning: $A\vec{x} = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3+1 \\ 0+0 \\ 1+3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} = 4 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = 4\vec{x}$

Derfor er $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ en egenvektor for $\lambda = 4$.

$$\det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} 3-\lambda & 0 & 1 \\ 0 & 2-\lambda & 0 \\ 1 & 0 & 3-\lambda \end{vmatrix} = (2-\lambda) \begin{vmatrix} 3-\lambda & 1 \\ 1 & 3-\lambda \end{vmatrix}$$

$$= (2-\lambda) \left((3-\lambda)^2 - 1 \right) = 0$$

$$\underbrace{0}_{\text{for } \lambda=2} \quad \underbrace{0 \text{ når } (3-\lambda)^2 = 1}_{\Leftrightarrow}$$

$$3-\lambda = \pm 1$$

$$\Leftrightarrow$$

$$\lambda = 2 \text{ eller } \lambda = 4.$$

$$\lambda_1 = 4$$

$$\lambda_2 = 2 \text{ (multiplisitet 2)}$$

Egenvektor for $\lambda_1 = 4$: $A - \lambda_1 I_3 = \begin{pmatrix} 3-4 & 0 & 1 \\ 0 & 2-4 & 0 \\ 1 & 0 & 3-4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} x_1 - x_3 = 0 \\ x_2 = 0 \end{matrix}$$

generell egenvektor: $\vec{x}_1 = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_3 \\ 0 \\ x_3 \end{pmatrix} = x_3 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

Egenvektor for $\lambda_2 = 2$

$$A - \lambda_2 I_3 = \begin{pmatrix} 3-2 & 0 & 1 \\ 0 & 2-2 & 0 \\ 1 & 0 & 3-2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{array}{l} x_1 + x_3 = 0 \\ x_2, x_3 \text{ free variable} \\ \Downarrow \\ x_1 = -x_3 \end{array}$$

$$\text{generell egenvektor: } \vec{x}_2 = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x_3 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 \\ x_2 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -x_3 \\ 0 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

$$= x_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + x_3 \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

generell egenvektor for $\lambda_2 = 2$

$$= \text{Sp} \left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$$

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

$$[P, D] = \text{eig}(A)$$

$$P^T * P$$

Mer generelt: Av og til må vi bruke polynomdivisjon.

I eks. 7.3 er det karakteristiske polynomet

$$-\lambda^3 + 24\lambda^2 - 176\lambda + 384$$

Prøving/festning: $\lambda = 4$ er en rot. Polynomdivisjon:

$$\begin{array}{r} (-\lambda^3 + 24\lambda^2 - 176\lambda + 384) : (\lambda - 4) = -\lambda^2 + 20\lambda - 96 \\ -(-\lambda^3 + 4\lambda^2) \\ \hline 20\lambda^2 - 176\lambda \\ -(20\lambda^2 - 80\lambda) \\ \hline -96\lambda + 384 \end{array}$$

$$\frac{-(-96\lambda + 384)}{0}$$

Derfor er $-\lambda^3 + 24\lambda^2 - 176\lambda + 384 = (\lambda - 4)(-\lambda^2 + 20\lambda - 96)$

$$\lambda = \frac{-20 \pm \sqrt{400 - 384}}{-2}$$

$$= \frac{-20 \pm 4}{-2} = 10 \mp 2$$

$\Rightarrow$ de andre røttene er $\lambda_2 = 8$
 $\lambda_3 = 12$

Hvorfor bruke egenvektorer?

Anta vi skal regne ut $A^{100} \vec{x}_0$

$\uparrow$
 krevende å regne ut.

I stedet: Skriv $\vec{x}_0 = \sum_i c_i \vec{v}_i$. Da er

$$A^{100} \vec{x}_0 = A^{100} \left(\sum_i c_i \vec{v}_i \right) = \sum_i c_i A^{100} \vec{v}_i = \sum_i c_i \lambda_i^{100} \vec{v}_i$$

$\uparrow$
 enklere å regne ut.