

Eksempel 7.4 Utvikling av en sykdom i en befolkning

x_n : Antall syke etter n dager

y_n : Antall friske etter n dager

- Antagelser:
- Antar 1000 mennesker til sammen ($x_n + y_n = 1000$) alle n .
 - Hvis en er syk i dag: 40% sjanse for at syk også i morgen
 - Hvis en er frisk i dag: 20% sjanse for at syk i morgen.

Først: Finner en overgangsmatrise A s.a. $\begin{pmatrix} x_{n+1} \\ y_{n+1} \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix}$, alle n .

- Antall syke = 40% av de som var syke dagen før + 20% av de som var friske dagen før:

$$x_{n+1} = 0.4 x_n + 0.2 y_n \quad (1)$$

- Antall friske = 60% av de som var syke dagen før + 80% av de som var friske dagen før.

$$y_{n+1} = 0.6 x_n + 0.8 y_n \quad (2)$$

Fra (1), (2):

$$\begin{pmatrix} x_{n+1} \\ y_{n+1} \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 0.4 & 0.2 \\ 0.6 & 0.8 \end{pmatrix}}_A \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix}$$

Eigenverdier: $\det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} 0.4 - \lambda & 0.2 \\ 0.6 & 0.8 - \lambda \end{vmatrix} = (0.4 - \lambda)(0.8 - \lambda) - 0.12$

$$= \lambda^2 - 1.2\lambda + 0.2 = 0$$
$$\lambda = \frac{1.2 \pm \sqrt{1.44 - 0.8}}{2}$$
$$= \frac{1.2 \pm 0.8}{2} = 0.6 \pm 0.4$$
$$\lambda_1 = 0.2, \lambda_2 = 1$$

$$\lambda_1 = 0.2 : A - \lambda_1 I_2 = \begin{pmatrix} 0.4-0.2 & 0.2 \\ 0.6 & 0.8-0.2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.2 & 0.2 \\ 0.6 & 0.6 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} x_1 + x_2 = 0 \\ \downarrow \\ x_1 = -x_2 \end{matrix}$$

$$\text{egenvektor: } \vec{v}_1 = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x_2 \\ x_2 \end{pmatrix} = x_2 \underbrace{\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}}_{\text{spesiell egenvektor}}$$

$$\lambda_1 = 1 : A - \lambda_2 I_2 = \begin{pmatrix} 0.4-1 & 0.2 \\ 0.6 & 0.8-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -0.6 & 0.2 \\ 0.6 & -0.2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{3} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\text{første rad sier: } x_1 - \frac{1}{3}x_2 = 0 \Rightarrow x_1 = \frac{1}{3}x_2$$

$$\text{egenvektor: } \vec{v}_2 = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3}x_2 \\ x_2 \end{pmatrix} = x_2 \begin{pmatrix} \frac{1}{3} \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\text{setter vi } x_2 = 3 \text{ får vi den spesielle egenvektoren} \\ \underline{\vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}}$$

$$\text{Antar starttilstanden } \vec{x}_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1000 \end{pmatrix} \leftarrow \text{alle friske i starten.}$$

Hva skjer når $n \rightarrow \infty$?

$$\text{Uttrykk } \vec{x}_0 \text{ med } \vec{v}_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}:$$

$$\text{Finn } c_1, c_2 \text{ s.a. } c_1 \vec{v}_1 + c_2 \vec{v}_2 = \vec{x}_0 \quad (\Leftrightarrow (\vec{v}_1 \ \vec{v}_2) \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = \vec{x}_0)$$

$$(\vec{v}_1 \ \vec{v}_2 \ \vec{x}_0) = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 1000 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1000 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1000 \\ 0 & 4 & 1000 \end{pmatrix} \\ \sim \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1000 \\ 0 & 1 & 250 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 250 \\ 0 & 1 & 250 \end{pmatrix} \leftarrow \begin{matrix} c_1 \\ c_2 \end{matrix}$$

Derfor er $\vec{x}_0 = 250\vec{v}_1 + 250\vec{v}_2$, og vi får

$$\vec{x}_n = A \vec{x}_{n-1} = A^2 \vec{x}_{n-2} = \dots = A^n \vec{x}_0 = A^n (250\vec{v}_1 + 250\vec{v}_2)$$

$$\vec{x}_{n-1} = A \vec{x}_{n-2} = 250 A^n \vec{v}_1 + 250 A^n \vec{v}_2$$

$$= 250 \underbrace{(0.2)^n}_{\rightarrow 0} \vec{v}_1 + 250 \cdot 1^n \vec{v}_2 \rightarrow 250 \vec{v}_2 = 250 \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 250 \\ 750 \end{pmatrix}$$

I det lange løp vil $\frac{1}{4}$ være syke.

$$\begin{aligned} A^n \vec{v}_1 &= A^{n-1} A \vec{v}_1 = A^{n-1} (0.2 \vec{v}_1) = 0.2 A^{n-1} \vec{v}_1 \\ &= 0.2 A^{n-2} A \vec{v}_1 = 0.2 A^{n-2} (0.2 \vec{v}_1) = (0.2)^2 A^{n-2} \vec{v}_1 \end{aligned}$$

Over: Forskjellige egenverdier, og $\mathbb{R}^2$ hadde en basis av egenvektorer. Dette holder generelt:

Proposisjon 7.5 La $\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_k$ være egenvektorer som svarer til forskjellige egenverdier. Da er $\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_k$ lineært uavhengige.

Bevis: Anta for motsigelse at $\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_k$ er lineært avhengige.

Da er $c_1 \vec{v}_1 + \dots + c_k \vec{v}_k = \vec{0}$, der minst en $c_i \neq 0$.

Finnes en slik relasjon med færrest mulig ikke-nuller, r stk.

$$c_1 \vec{v}_1 + \dots + c_r \vec{v}_r = \vec{0}$$

gang med $-\lambda_1$: $-c_1 \lambda_1 \vec{v}_1 - \dots - c_r \lambda_1 \vec{v}_r = \vec{0}$ (1)

Vi har også: $A(c_1 \vec{v}_1 + \dots + c_r \vec{v}_r) = \vec{0}$

 $c_1 \lambda_1 \vec{v}_1 + c_2 \lambda_2 \vec{v}_2 + \dots + c_r \lambda_r \vec{v}_r = \vec{0}$ (2)

Legg sammen (1) og (2):

$$c_2 \underbrace{(\lambda_2 - \lambda_1)}_{\neq 0} \vec{v}_2 + \dots + c_r \underbrace{(\lambda_r - \lambda_1)}_{\neq 0} \vec{v}_r = \vec{0}$$

~~$A(c_1 \vec{v}_1) = c_1 A \vec{v}_1 = c_1 \lambda_1 \vec{v}_1$~~

Detto er en enda kortere lineær avhengighetsrelasjon, som er en motsigelse. ■

Hvis en matrise har egenverdier med multiplisitet > 1 .

1. Vi kan ha at $\mathbb{R}^n$ ikke har en basis av egenvektorer for A :

Eks: $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}$ $\det(A - \lambda I_2) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & -2 \\ 2 & -3-\lambda \end{vmatrix}$
 $= (1-\lambda)(-3-\lambda) + 4 = \lambda^2 + 2\lambda + 1 = (\lambda + 1)^2$
 $\Rightarrow \lambda = -1$ er eneste egenvektor.

$$A - \lambda I = \begin{pmatrix} 1 - (-1) & -2 \\ 2 & -3 - (-1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 2 & -2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow x_1 = x_2 = 0$$

$$x_1 = x_2 \Rightarrow \text{generell egenvektor er } x_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

$\Rightarrow$ Ingen basis av egenvektorer (fant bare 1)

2. Vi kan ha at $\mathbb{R}^n$ har basis av egenvektorer:

Eks: $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$: $\det(A - \lambda I_2) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 0 \\ 0 & 1-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)^2$
 $\Rightarrow \lambda = 1$ eneste.

$$A - \lambda I_2 = \begin{pmatrix} 1-1 & 0 \\ 0 & 1-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow x_1, x_2 \text{ er begge frie variable.}$$

$$\text{egenvektor: } \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ x_2 \end{pmatrix} = x_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ og $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ er en basis av egenvektorer.

Komplekse egenverdier / vektorer

Eksempel 7.8 $A = \begin{pmatrix} 2 & -8 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow \det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} 2-\lambda & -8 \\ 2 & 2-\lambda \end{vmatrix}$

$$= (2-\lambda)^2 + 16 = 0$$

$$(2-\lambda)^2 = -16$$

$$2-\lambda = \pm 4i$$

$$\lambda = 2 \pm 4i$$

Egenvektor for $\lambda_1 = 2 + 4i$

$$A - \lambda_1 I = \begin{pmatrix} 2 - (2+4i) & -8 \\ 2 & 2 - (2+4i) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4i & -8 \\ 2 & -4i \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -2i \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

første rad: $x_1 - 2ix_2 = 0 \Rightarrow x_1 = 2ix_2$

egenvektor: $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2ix_2 \\ x_2 \end{pmatrix} = x_2 \underbrace{\begin{pmatrix} 2i \\ 1 \end{pmatrix}}_{\text{spesiell egenvektor.}}$

Egenvektor for $\lambda_2 = 2 - 4i$

$$A - \lambda_2 I = \begin{pmatrix} 2 - (2-4i) & -8 \\ 2 & 2 - (2-4i) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4i & -8 \\ 2 & 4i \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2i \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

første rad: $x_1 + 2ix_2 = 0 \Rightarrow x_1 = -2ix_2$

egenvektor: $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2ix_2 \\ x_2 \end{pmatrix} = x_2 \underbrace{\begin{pmatrix} -2i \\ 1 \end{pmatrix}}_{\text{spesiell egenvektor}}$

Vi så: egenverdier / vektorer er konjugerte av hverandre.

Når A er reell: Dette holder mer generelt: Hvis $A\vec{x} = \lambda\vec{x}$:

$$\underline{A\vec{x}} = \underline{\bar{A}\vec{x}} = \underline{\overline{A\vec{x}}} = \underline{\overline{\lambda\vec{x}}} = \underline{\bar{\lambda}\vec{x}}$$

Derfor er også $\bar{\lambda}$ egenverdi, med egenvektor $\bar{\vec{x}}$.

Eksempel 7.9 Rotasjonsmatrisen: $A = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$

Eigenverdier: $\det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} \cos \theta - \lambda & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta - \lambda \end{vmatrix}$

$$= (\cos \theta - \lambda)^2 + \sin^2 \theta = 0$$
$$\cos \theta - \lambda = \pm i \sin \theta$$
$$\lambda = \cos \theta \pm i \sin \theta.$$

Eigenvektor $\lambda_1 = \cos \theta + i \sin \theta$

$$A - \lambda_1 I = \begin{pmatrix} \cos \theta - (\cos \theta + i \sin \theta) & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta - (\cos \theta + i \sin \theta) \end{pmatrix}$$
$$= \dots = \begin{pmatrix} -i \sin \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & -i \sin \theta \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -i \\ -i & -1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -i \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$
$$\Rightarrow \begin{pmatrix} i \\ 1 \end{pmatrix} \text{ er egenvektor for } \cos \theta + i \sin \theta.$$

Da er $\begin{pmatrix} -i \\ 1 \end{pmatrix}$ er egenvektor for $\cos \theta - i \sin \theta$.