

Kap. 8. Diagonalisering

Anta A reell og $n \times n$, med egenvektorer $\vec{p}_1, \dots, \vec{p}_k$,
tilhørende egenverdier $\lambda_1, \dots, \lambda_k$.

Fra $A\vec{p}_i = \lambda_i \vec{p}_i$ følger at

$$\begin{aligned} A(\vec{p}_1 \dots \vec{p}_k) &= (A\vec{p}_1 \dots A\vec{p}_k) = (\lambda_1 \vec{p}_1 \dots \lambda_k \vec{p}_k) \\ &= (\vec{p}_1 \dots \vec{p}_k) \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & & \\ \vdots & & \ddots & \\ 0 & \dots & & \lambda_k \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Dette kan også skrives $AP = PD$, der $P = (\vec{p}_1 \dots \vec{p}_k)$
og der D er diagonalmatrisen med $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ på diagonalen.

Hvis $k=n$ og egenvektorene er lineært uavhengige,
så er P $n \times n$, og invertierbar, og $AP = PD$ kan skrives:

$$A = PDP^{-1}$$

$$P^{-1}AP = D$$

Matriser som lar seg skrive slik kalles diagonaliserbare.

Altso: $n \times n$ -matriser som har n lineært uavhengige
egenvektorer er diagonaliserbare.

Omvendt: Hvis $A = PDP^{-1}$, så har A n lineært uavhengige
egenvektorer.

Proposisjon 8.1: En $n \times n$ -matrise er diagonaliserbar
hvis og bare hvis $\mathbb{C}^n$ har en basis bestående av
egenvektorer for A .

Fordeler med diagonaliserbarhet:

1. En vektor $\vec{x}_0$ i $\mathbb{R}^n$ kan da skrives $\sum_{i=1}^n c_i \vec{p}_i$, og det er da lettere å regne ut

$$A^n \vec{x}_0 = A^n \left(\sum_{i=1}^n c_i \vec{p}_i \right) = \sum_{i=1}^n c_i A^n \vec{p}_i = \sum_{i=1}^n c_i \lambda_i^n \vec{p}_i$$

↑
lettere.

2. Lettere å regne ut potenser av A :

$$A^n = (PDP^{-1})^n = \underbrace{PDP^{-1} PDP^{-1} \dots PDP^{-1}}_I = PD^n P^{-1}$$

↑
lettere

3. Systemer av differensialligninger.

Eksempel 8.2 $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}$ hadde ikke en basis av egenvektorer, så A er ikke diagonaliserbar.

Eksempel 8.3 Vi har sett at $A = \begin{pmatrix} 2 & -8 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$ har egenverdier $\lambda_1 = 2+4i$, $\lambda_2 = 2-4i$ tilhørende egenvektorer: $\begin{pmatrix} 2i \\ 1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} -2i \\ 1 \end{pmatrix}$

Vi finner P^{-1} :

$$\begin{pmatrix} 2i & -2i & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 2i & -2i & 1 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & -4i & 1 & -2i \end{pmatrix} \\ \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & \frac{1}{4}i & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & -\frac{i}{4} & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & \frac{i}{4} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \xrightarrow{P^{-1}} \frac{1}{4i} \frac{i}{-4i^2} = \frac{i}{4}.$$

Derfor: $P^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{i}{4} & \frac{1}{2} \\ \frac{i}{4} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} -i & 2 \\ i & 2 \end{pmatrix}$

Diagonalisering av A :

$$A = PDP^{-1} = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 2i & -2i \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2+4i & 0 \\ 0 & 2-4i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -i & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Hvordan regne ut $D^n = \begin{pmatrix} (2+4i)^n & 0 \\ 0 & (2-4i)^n \end{pmatrix}$:

Skriv $2+4i$ på polarform, $re^{i\theta}$. Da er

$$(2+4i)^k = (re^{i\theta})^k = r^k e^{ik\theta}$$

$$(2-4i)^k = (re^{-i\theta})^k = r^k e^{-ik\theta}$$

8.1 Diagonalisering og differensiallikninger

Et lineært førsteordens system av differensiallikninger med konstante koeffisienter.

$$x_1'(t) = a_{11} x_1(t) + a_{12} x_2(t) + \dots + a_{1n} x_n(t)$$

$$x_2'(t) = a_{21} x_1(t) + a_{22} x_2(t) + \dots + a_{2n} x_n(t)$$

$\vdots$

$$x_n'(t) = a_{n1} x_1(t) + a_{n2} x_2(t) + \dots + a_{nn} x_n(t)$$

$x_1(t), \dots, x_n(t)$ er ukjente funksjoner vi vil finne.

Vi definerer $A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$.

$$\vec{x}(t) = (x_1(t), \dots, x_n(t)), \quad \vec{x}'(t) = (x_1'(t), \dots, x_n'(t)).$$

(*) kan da skrives: $\vec{x}'(t) = A \vec{x}(t)$.

Proposisjon 8.4 Anta A er diagonaliserbar og $A = PDP^{-1}$.
Da har vi at

$$\vec{x}(t) \text{ løser } \vec{x}'(t) = A\vec{x}(t) \quad (1)$$

$$\vec{y}(t) = P^{-1}\vec{x}(t) \text{ løser } \vec{y}'(t) = D\vec{y}(t). \quad (2)$$

$$\vec{x}(t) = P\vec{y}(t)$$

Beweis: $\Downarrow$ Hus $\vec{x}(t)$ løser (1):

$$\vec{y}'(t) = (P^{-1}\vec{x}(t))' = P^{-1}\vec{x}'(t) = P^{-1}A\vec{x}(t)$$

$$= P^{-1}AP\vec{y}(t) = D\vec{y}(t)$$

$$A = PDP^{-1} \Rightarrow D = P^{-1}AP.$$

$\Uparrow$: Tilsvarende.

Poeng: Lettore & løse (2): $\vec{y}'(t) = D\vec{y}(t): \begin{pmatrix} y_1'(t) \\ \vdots \\ y_n'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1 y_1(t) \\ \vdots \\ \lambda_n y_n(t) \end{pmatrix}$

så (2) innebærer å løse $y_i'(t) = \lambda_i y_i(t)$
uavhengig av hverandre!

Løsning av $y_i'(t) = \lambda_i y_i(t)$ er $y_i(t) = C_i e^{\lambda_i t}$ $\rightarrow$ $y_1' = C_1 \lambda_1 e^{\lambda_1 t}$
 $\lambda_1 y_1 = C_1 \lambda_1 e^{\lambda_1 t}$

Derfor: $\vec{y}(t) = \begin{pmatrix} y_1(t) \\ \vdots \\ y_n(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C_1 e^{\lambda_1 t} \\ \vdots \\ C_n e^{\lambda_n t} \end{pmatrix}, \text{ og}$

$$\vec{x}(t) = P \begin{pmatrix} C_1 e^{\lambda_1 t} \\ \vdots \\ C_n e^{\lambda_n t} \end{pmatrix} = (\vec{p}_1 \cdots \vec{p}_n) \begin{pmatrix} C_1 e^{\lambda_1 t} \\ \vdots \\ C_n e^{\lambda_n t} \end{pmatrix}$$

$$= C_1 e^{\lambda_1 t} \vec{p}_1 + \cdots + C_n e^{\lambda_n t} \vec{p}_n$$