

Kap. 9 Ortogonalt diagonaliserbare matriser og kondisjonstall

Vi skal løse $A \vec{x} = \vec{b}$ på en datamaskin.

pga. avrundingsfeil: Maskinen løser i stedet

$$(A + E) \vec{x} = \vec{b} + \vec{e}$$

Spørsmål: Hvordan forplanter ^{pga avrundingsfeil, små} avrundingsfeilen seg til løsningen $\vec{x}$?

Eksempel: $A = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1+\varepsilon & 1-\varepsilon \\ 1-\varepsilon & 1+\varepsilon \end{pmatrix}$, der ε er et gitt tall, $\varepsilon > 0$.
 $\vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

Lette å use at A er inverterbar,

$\vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ er den unike løsningen av $A \vec{x} = \vec{b}$

La oss sette $E = 0$, og $\vec{e} = 10^{-3} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$

Oppgave 4: $A \vec{y} = \vec{b} + \vec{e}$ har løsning $\vec{y} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + 10^{-3} \varepsilon^{-1} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$

ser at $\vec{y} \rightarrow \infty$ når $\varepsilon \rightarrow 0$!

Mer teori

Hvis A er diagonaliserbar ($A = PDP^{-1}$), og

i tillegg $\underbrace{P^{-1} = P^T}$, så er
P kalles ortogonal

$$A = PDP^{-1} = PDP^T.$$

Da kalles A ortogonalt diagonaliserbar.

Da er spesielt A symmetrisk:

$$A^T = (PDP^T)^T = (P^T)^T D^T P^T = PD^T P^T = PDP^T = A$$

Spektralteoremet sier, omvendt, at en reell, symmetrisk matrise er ortogonalt diagonaliserbar.

Beriset for spektralteoremet bygger på:

Proposisjon 9.1 En reell symmetrisk matrise har kun reelle egenverdier.

Beris: La $\vec{x}, \vec{y} \in \mathbb{R}^n$. Det komplekse skalarproduktet gir:

$$(A\vec{x}) \cdot \vec{y} = (A\vec{x})^T \vec{y} = \vec{x}^T A^T \vec{y} = \vec{x}^T A \vec{y}$$

$$\vec{x} \cdot (A\vec{y}) = \vec{x}^T \overline{A\vec{y}} = \vec{x}^T \bar{A} \bar{\vec{y}} = \vec{x}^T A \vec{y},$$

slik at $(A\vec{x}) \cdot \vec{y} = \vec{x} \cdot (A\vec{y})$ for alle $\vec{x}, \vec{y}$.

Sett $\vec{x} = \vec{y}$, og $A\vec{x} = \lambda \vec{x}$ med $\vec{x} \neq \vec{0}$

$$(\lambda \vec{x}) \cdot \vec{x} = \vec{x} \cdot (\lambda \vec{x}) \Rightarrow \lambda |\vec{x}|^2 = \bar{\lambda} |\vec{x}|^2$$

$\Downarrow$

$$\lambda = \bar{\lambda} \Rightarrow \lambda \text{ reell}$$

Mer generelt (vi hopper over beriset)

Teorem 9.4 En reell symmetrisk $n \times n$ matrise

1. Har n reelle egenverdier (telt med multiplisitet).
2. Har innbyrdes ortogonale egenrom
3. Dimensjonen til egenrommet er lik multiplisiteten til egenverdien.

Lemma 9.5 Anta A reell, symmetrisk, inverterbar, og
 $|\lambda_1| \geq |\lambda_2| \geq \dots \geq |\lambda_n| > 0$ (egenverdi rangert
etter absoluttverdi)

Da er:

$$|\lambda_n| |\vec{x}| \leq |A \vec{x}| \leq |\lambda_1| |\vec{x}|$$

for alle $\vec{x}$.

Vi hopper over beviset for Lemma 9.5.

Definisjon 9.6: Anta a, b er tall

$\left| \frac{b-a}{a} \right|$ kalles den relative feilen mellom
 a og b .

Hvis $\vec{a}$ og $\vec{b} \in \mathbb{R}^n$: den relative
feilen mellom $\vec{a}$ og $\vec{b}$ er $\frac{|\vec{b}-\vec{a}|}{|\vec{a}|}$

$|b-a|$ kalles for absolutt feil mellom a og b

Tilbake til systemene $A \vec{x} = \vec{b}$, $A \vec{y} = \vec{b} + \vec{e}$

Hvordan forplanter den relative feilen mellom

$\vec{b}$ og $\vec{b} + \vec{e}$ seg til løsningen $\vec{x}$ og $\vec{y}$

$$\frac{||\vec{b} + \vec{e}| - |\vec{b}||}{|\vec{b}|} = \frac{|\vec{e}|}{|\vec{b}|}$$

$$\frac{|\vec{y} - \vec{x}|}{|\vec{x}|}$$

For vårt eksempel med $A = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1+\varepsilon & 1-\varepsilon \\ 1-\varepsilon & 1+\varepsilon \end{pmatrix}$, $\vec{b} = \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\vec{e} = 10^{-3} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$

$$\vec{y} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + 10^{-3} \varepsilon^{-1} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$\frac{|\vec{e}|}{|\vec{b}|} = \frac{10^{-3} \sqrt{2}}{\sqrt{2}} = 10^{-3}$$

$$\vec{y} - \vec{x} = 10^{-3} \varepsilon^{-1} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \frac{|\vec{y} - \vec{x}|}{|\vec{x}|} = \frac{10^{-3} \varepsilon^{-1} \sqrt{2}}{\sqrt{2}} = 10^{-3} \varepsilon^{-1}$$

rel. feil: 10^{-3} ; HS propagerer til $10^{-3} \varepsilon^{-1}$; løsningen

Prop. med faktor ε^{-1} , som er stor.

Proposisjon 9.7 Anta A symmetrisk, inverterbar, med egenverdier $|\lambda_1| \geq |\lambda_2| \geq \dots \geq |\lambda_n| > 0$

Da har vi at

$$\left| \frac{\lambda_n}{\lambda_1} \right| \frac{|\vec{e}|}{|\vec{b}|} \leq \frac{|\vec{y} - \vec{x}|}{|\vec{x}|} \leq \left| \frac{\lambda_1}{\lambda_n} \right| \frac{|\vec{e}|}{|\vec{b}|}$$

$$\varepsilon^{-1} \frac{|\vec{e}|}{|\vec{b}|}$$

Vi definerer kondisjonstallet til A som $\left| \frac{\lambda_1}{\lambda_n} \right|$, kalt $k(A)$

Da kan prop. 9.7 skrives

$$\frac{1}{k(A)} \frac{|\vec{e}|}{|\vec{b}|} \leq \frac{|\vec{y} - \vec{x}|}{|\vec{x}|} \leq k(A) \frac{|\vec{e}|}{|\vec{b}|}$$

Oppgave 4: Egenverdiene til A er $\varepsilon < 1$, og 1 ,

$$\text{slik at } k(A) = \frac{1}{\varepsilon} = \varepsilon^{-1}$$

For eksemplet over: Fikk likhet i høyre ulikhet

