

Kap. 10, Interpolasjon

1 MA1100 neste uke:

Taylorpolynomier - tilnærming til en funksjon f med et polynom som har samme verdi i et punkt a , og de samme deriverte i a .

Enhvert polynom av grad $\leq n$ kan skrives

$$p(x) = c_0 + c_1(x-a) + c_2(x-a)^2 + \dots + c_n(x-a)^n.$$

Deriver k ganger i a :

$c_{k-1}(x-a)^{k-1}$	$c_k(x-a)^k$	$c_{k+1}(x-a)^{k+1}$
$\downarrow$	$\downarrow$	$\downarrow$
0	$c_k k!$	$(k+1) \cdot k \dots 2 (x-a)$
		$\downarrow x=a$
		0

Derfor: $p^{(k)}(a) = c_k k!$

Hvis $p^{(k)}(a) = f^{(k)}(a)$ for alle k , så må $c_k = \frac{f^{(k)}(a)}{k!}$

Det følger at

$$p_n(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n \quad (*)$$

er det unike polynom av grad $\leq n$ s.d.

$$p_n(a) = f(a), \quad p_n'(a) = f'(a), \quad p_n^{(n)}(a) = f^{(n)}(a).$$

(*) kalles Taylorrekka til f av orden n om a .

Taylor's formel med restledd sier at, hvis f er $n+1$ ganger kontinuerlig deriverbar, så er

$$f(x) = p_n(x) + \underbrace{\frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!} (x-a)^{n+1}}_{\text{restledd}} \text{ for en } c \in [a, x].$$

Så hvis de deriverte ikke er for store, så er p_n en god tilnærming til f .

I interpolasjon finner vi i stedet en tilnærming til f med et polynom, som har samme verdier som f i et gitt sett med punkter

$$\underbrace{x_0, x_1, \dots, x_n}_{\text{interpolasjonspunkter}}$$

$f(x_k) = p_n(x_k)$ kalles for interpolasjonsbetingelser, og p_n et interpolerende polynom.

Sek 10.1 Interpolasjon på kanonisk form

Et n 'te gradspolynom kan skrives på kanonisk form:

$$p_n(x) = c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + \dots + c_n x^n$$

Interpolasjonsbetingelsene:

$$f(x_0) = c_0 + c_1 x_0 + c_2 x_0^2 + \dots + c_n x_0^n$$

$$f(x_1) = c_0 + c_1 x_1 + c_2 x_1^2 + \dots + c_n x_1^n$$

$\vdots$

$\vdots$

$$f(x_n) = c_0 + c_1 x_n + c_2 x_n^2 + \dots + c_n x_n^n$$

På matrise form:

$$\begin{pmatrix} 1 & x_0 & x_0^2 & \dots & x_0^n \\ 1 & x_1 & x_1^2 & \dots & x_1^n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \dots & x_n^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_0 \\ c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f(x_0) \\ f(x_1) \\ f(x_2) \\ \vdots \\ f(x_n) \end{pmatrix}$$

En kvadratisk Vandermondematrise: Denne er inverterbar når $x_0, x_1, \dots, x_n$ er forskjellige (eksempel 4.7)

Det finnes derfor en unik $\vec{c} = (c_0, c_1, c_2, \dots, c_n)$ som tilfredsstiller dette, slik at det interpolerende polynomet er unikt.

Eksempel 10.1 Finn det unike polynomet p_2 av grad ≤ 2 som går gjennom punktene $(0,1), (1,3), (2,2)$

Løsning: Interpolasjonsbetingelser:

$$f(0) = 1 = p_2(0) = c_0 + c_1 \cdot 0 + c_2 \cdot 0^2 = c_0$$

$$f(1) = 3 = p_2(1) = c_0 + c_1 \cdot 1 + c_2 \cdot 1^2 = c_0 + c_1 + c_2$$

$$f(2) = 2 = p_2(2) = c_0 + c_1 \cdot 2 + c_2 \cdot 2^2 = c_0 + 2c_1 + 4c_2$$

$$c_0 = 1$$

$$c_0 + c_1 + c_2 = 3 \Rightarrow 1 + c_1 + c_2 = 3 \Rightarrow c_1 + c_2 = 2$$

$$c_0 + 2c_1 + 4c_2 = 2 \Rightarrow 1 + 2c_1 + 4c_2 = 2 \Rightarrow 2c_1 + 4c_2 = 1 \Rightarrow 2c_2 = -3$$

||

$$c_2 = -\frac{3}{2}$$

$$c_1 = \frac{7}{2}$$

$$\underline{p_2(x) = c_0 + c_1 x + c_2 x^2 = 1 + \frac{7}{2}x - \frac{3}{2}x^2}$$

Sek 10.2 Interpolasjon på Newtonform

$x_0, x_1, \dots, x_n$ interpolasjonspunkter

Vi sier at p_n er på Newtonform hvis det skrives som

$$p_n(x) = C_0 + C_1(x-x_0) + C_2(x-x_0)(x-x_1) + \dots + C_n(x-x_0)(x-x_1)\dots(x-x_{n-1})$$

Interpolasjonsbetingelsene tar nå formen:

$$f(x_0) = C_0$$

$$f(x_1) = C_0 + C_1(x_1 - x_0)$$

$\vdots$

$\vdots$

$$f(x_n) = C_0 + C_1(x_n - x_0) + C_2(x_n - x_0)(x_n - x_1) \dots$$

$$+ C_n(x_n - x_0)(x_n - x_1)\dots(x_n - x_{n-1})$$

På matriseform:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & x_1 - x_0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & x_n - x_0 & (x_n - x_0)(x_n - x_1) & \dots & (x_n - x_0)(x_n - x_1)\dots(x_n - x_{n-1}) \end{pmatrix}$$

nedre triangulær. slike systemer kan lett løses ved fremoversubstitusjon; så lenge diagonalelementene $\neq 0$:

$$\begin{pmatrix} a_{00} & 0 & 0 \\ a_{10} & a_{11} & 0 \\ a_{20} & a_{21} & a_{22} \\ \vdots & \vdots & \vdots \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_0 \\ c_1 \\ \vdots \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_0 \\ f_1 \\ \vdots \end{pmatrix}$$

Første likning: $a_{00}c_0 = f_0 \Rightarrow c_0 = \frac{f_0}{a_{00}}$

Hvis $c_0, \dots, c_{k-1}$ er funnet fra de første k likningene:

Neste likning: $a_{k0}c_0 + a_{k1}c_1 + \dots + a_{kk}c_k = f_k$

$\Downarrow$

$$c_k = \frac{f_k - a_{k0}c_0 - a_{k1}c_1 - \dots - a_{k,k-1}c_{k-1}}{a_{kk}},$$

Dermed kan vi lett finne c_k også!

k multiplikasjoner, $\left. \begin{array}{l} k \text{ subtraksjoner} \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{til sammen} \\ 2k \end{array}$

Til sammen:

$$\begin{aligned} & 2 \cdot 1 + 2 \cdot 2 + \dots + 2 \cdot n \\ &= 2(1 + 2 + \dots + n) = 2 \frac{n(n+1)}{2} \\ &= n(n+1). \end{aligned}$$

Generell Gausseliminasjon krever fler regneoperasjoner.

Newtonformen for $n=0$: $c_0 = f(x_0)$
interpolerende polynom : $p_0(x) = f(x_0)$

for $n=1$: $f(x_0) = c_0$
 $f(x_1) = c_0 + c_1(x_1 - x_0)$

$\Downarrow$

$$c_1 = \frac{f(x_1) - c_0}{x_1 - x_0} = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}$$

interpolerende polynom :

$$p_1(x) = c_0 + c_1(x - x_0) = f(x_0) + \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0} (x - x_0)$$

sekanten til f gjennom
 x_0 og x_1 .

for $n=2$:

$$c_0 = f(x_0)$$

$$c_1 = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}$$

$$f(x_2) = c_0 + c_1(x - x_0) + c_2(x_2 - x_0)(x_2 - x_1)$$

$$c_2 = \frac{f(x_2) - c_0 - c_1(x_2 - x_0)}{(x_2 - x_0)(x_2 - x_1)}$$

$$= \frac{f(x_2) - f(x_0) - \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}(x_2 - x_0)}{(x_2 - x_0)(x_2 - x_1)}$$

$$= \dots = \frac{\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} - \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}}{x_2 - x_0}$$