

Kap. 11 Numerisk derivasjon

Av og til er en funksjon bare kjent i et sett med punkter. Hvordan kan vi da finne en (tilnærming) til den deriverte?

Strategi 11.1 Anta f er kjent i punktene

$$\begin{matrix} m=-2 & m=-1 & m=0 & m=1 & m=2 \\ \dots, a-2h, & a-h, & a, & a+h, & a+2h, \dots \end{matrix}$$

(h er "oppløsningen" for kjente verdier av f .)

1. Plukk en delmengde av disse punktene nær a .

Skriv disse som

$$a + m_0 h, a + m_1 h, \dots, a + m_n h \quad (*)$$

2. Finn det unike polynom p_n av grad $\leq n$, som interpolerer f i punktene $(*)$

3. Bruk $p_n'(a)$ som en tilnærming til $f'(a)$

Dette kalles punktmetoden basert på punktene $(*)$

kan brukes for å finne tilnærming til høyere deriverte:

$$\text{erstatt } f'(a), p_n'(a) \text{ med } f^{(k)}(a), p_n^{(k)}(a)$$

Trunkeringsfeilen i tilnærmingen over er definert ved

$$E_k(f; a, h) = f^{(k)}(a) - p_n^{(k)}(a)$$

(feilen som følger av at vi deriverer p_n i stedet for f .)

Notasjon: Når f er k ganger deriverbar vil vi skrive

$$M_k = \max_x |f^{(k)}(x)|$$

der max tas over et gitt intervall.

Sek 11.1 Newtonkvotienten

$m_0 = 0$ $m_1 = 1$

Vi baserer vår tilnærming på 2 punkter $f(a)$, $f(a+h)$

polynomet i 2. er da sekanten gjennom

$(a, f(a))$, $(a+h, f(a+h))$

$$p_1(x) = \frac{f(a+h) - f(a)}{h} (x-a) + f(a)$$

$a+h-a=h$

3. : Vi har at $p_1'(x) = \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$ (sekantens stigningstall)

Dette kalles også Newtonkvotienten.

Den deriverte er def. ved $f'(a) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$

Trunkeringsfeil for Newtonkvotienten:

$$E_1(f; a, h) = f'(a) - \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

Taylor's formel med restledd (når f er to ganger kont.
(om a , av grad 1 $x-a=h$ deriverbar). : $(\frac{h^n}{n!} f^{(n)}(a))$

$$f(a+h) = f(a) + hf'(a) + \frac{h^2}{2!} f''(c) \quad (c \in [a, a+h])$$

Skriver om til:

$$hf'(a) - (f(a+h) - f(a)) = -\frac{h^2}{2} f''(c)$$

$$f'(a) - \frac{f(a+h) - f(a)}{h} = -\frac{h}{2} f''(c)$$

når f er 2 ganger kont. deriverbar : $M_2 = \max_{x \in [a, a+h]} |f''(x)|$
eksisterer.

$$|E, (f; a, h)| = \left| -\frac{h}{2} f''(a) \right| \leq \frac{h}{2} M_2 \quad (k = \frac{M_2}{2})$$

Feiloen i våre metoder: stort sett på formen kh^k
(polynomiell i h)

Best å plote med loglog-plott: Plotter $\log$ til feilen mot $\log$ til h

$$\begin{aligned} e &= kh^k \\ \log e &= \log(kh^k) = \log k + \log h^k \\ &= \log k + k \log h \end{aligned} \quad y = ax + b$$

I loglog plott: Skal se en linje gjennom $(0, \log k)$,
Stigningstall k .
skjæring y-aksen.

Newtonkvotienten:

$$\begin{aligned} \log |E, (f; a, h)| &\approx \log \left| \frac{M_2}{2} h \right| \\ &\approx \log h + \log \left(\frac{\sin 0.5}{2} \right) \\ &\approx \log h - 0.6203 \end{aligned}$$

Sek 11.2 Alternativer til Newtonkvotienten

Punktmetoden basert på 3 punkter $f(\underbrace{a-h}_{x_0})$, $f(\underbrace{a}_{x_1})$, $f(\underbrace{a+h}_{x_2})$

$$C_0 = f(x_0) = f(a-h)$$

$$C_1 = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0} = \frac{f(a) - f(a-h)}{h}$$

$$\begin{aligned} C_2 &= \frac{\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} - \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}}{x_2 - x_0} = \frac{\frac{f(a+h) - f(a)}{h} - \frac{f(a) - f(a-h)}{h}}{2h} \\ &= \frac{f(a+h) - 2f(a) + f(a-h)}{2h^2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} p_2(x) &= f(a-h) + \frac{f(a) - f(a-h)}{h} (x - (a-h)) \\ &\quad + \frac{f(a+h) - 2f(a) + f(a-h)}{2h^2} (x - (a-h))(x - a) \end{aligned}$$

$$p_2'(x) = \frac{f(a) - f(a-h)}{h} + \frac{f(a+h) - 2f(a) + f(a-h)}{2h^2} (\underbrace{(x-a) + x - (a-h)}_{2x - (a-h) - a})$$

$$\begin{aligned} p_2'(a) &= \frac{f(a) - f(a-h)}{h} + \frac{f(a+h) - 2f(a) + f(a-h)}{2h^2} h \\ &= \frac{2f(a) - 2f(a-h) + f(a+h) - 2f(a) + f(a-h)}{2h} \\ &= \frac{f(a+h) - f(a-h)}{2h} \end{aligned}$$

Stigningstallet til sekanten gjennom $a-h$ og $a+h$.

Kalles den symmetriske Newtonkvotienten

Trunkeringsfeil

$$f(a+h) = f(a) + f'(a)h + \frac{1}{2!}f''(a)h^2 + \frac{1}{3!}f'''(c_1)h^3$$

$$f(a-h) = f(a) - f'(a)h + \frac{1}{2!}f''(a)h^2 - \frac{1}{3!}f'''(c_2)h^3$$

$$f(a+h) - f(a-h) = 2f'(a)h + \frac{1}{6}f'''(c_1)h^3 + \frac{1}{6}f'''(c_2)h^3$$

$$\frac{f(a+h) - f(a-h)}{2h} - f'(a) = \frac{1}{12}f'''(c_1)h^2 + \frac{1}{12}f'''(c_2)h^2$$

Ta absolutt verdi:

$$\begin{aligned} \left| \frac{f(a+h) - f(a-h)}{2h} - f'(a) \right| &= |E_1(f; a, h)| = \left| \frac{1}{12}f'''(c_1)h^2 + \frac{1}{12}f'''(c_2)h^2 \right| \\ &\leq \frac{h^2}{12} |f'''(c_1)| + \frac{h^2}{12} |f'''(c_2)| \\ &\leq \frac{h^2}{12} M_3 + \frac{h^2}{12} M_3 = \frac{h^2}{6} M_3 \end{aligned}$$

Symmetrisk Newtonkvotient har derfor en feil som går raskere mot 0.

$$\log h^2 = 2 \log h$$