

Kap. 12 Numerisk integrasjon bruker kjente funksjonsverdier til å finne tilnærminger til integralet $\int_a^b f(x) dx$, der $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$

Strategi: 1. Finn polynomet som interpolerer i et passende sett med punkter.

2. Bruk integralet av dette polynomet som tilnærming til $\int_a^b f(x) dx$.

Definisjon av integralet

Partisjon av $[a, b]$: En samling av tall $a = x_0 < x_1 < \dots < x_{n-1} < x_n = b$

Uniform partisjon: $x_i - x_{i-1} = \underbrace{\frac{b-a}{n}}_{\text{steglengde}}, i = 1, \dots, n$

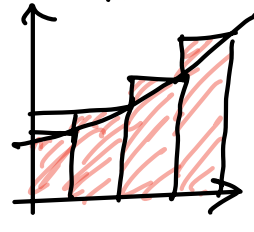
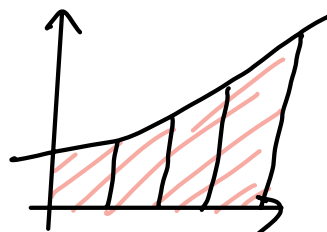
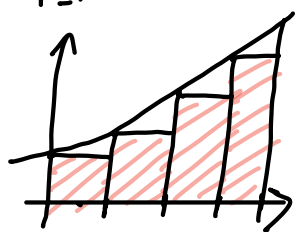
Størrelse på partisjon π : $|\pi| = \max_{i=1, \dots, n} |x_i - x_{i-1}|$
(også kalt maksvidde)

Maks/min på hvert delintervall:

$$m_i = \min_{x \in [x_{i-1}, x_i]} f(x), \quad M_i = \max_{x \in [x_{i-1}, x_i]} f(x)$$

Det er klart at:

$$\underline{I}(\pi) := \sum_{i=1}^n m_i (x_i - x_{i-1}) \leq \text{arealet under } f \leq \bar{I}(\pi) := \sum_{i=1}^n M_i (x_i - x_{i-1})$$



Hvis grenseverdiene $\lim_{|\Pi| \rightarrow 0} \underline{I}(\Pi)$ og $\lim_{|\Pi| \rightarrow 0} \bar{I}(\Pi)$ begge

eksisterer og er like, så sier vi at f er integrerbar,

og vi definerer
$$I = \int_a^b f(x) dx = \lim_{|\Pi| \rightarrow 0} \underline{I}(\Pi) = \lim_{|\Pi| \rightarrow 0} \bar{I}(\Pi)$$

I kalkulus: Enhver kont. funksjon på et lukket intervall er integrerbar

Både $\underline{I}(\Pi)$ og $\bar{I}(\Pi)$ kan brukes som tilnærming til $\int_a^b f(x) dx$.

På datamaskin: Vanskelig å finne max/min på et intervall numerisk.

Teorem 12.3 Hvis f er kont. på $[a, b]$, og $\{x_0, x_1, \dots, x_n\}$ er en partisjon av $[a, b]$, og t_i er tall i $[x_{i-1}, x_i]$, så vil $\sum_{i=1}^n f(t_i)(x_i - x_{i-1})$ konvergere mot $\int_a^b f(x) dx$ når $|\Pi| \rightarrow 0$.

Bevis: Vi har at

$$\underline{I}(\Pi) = \sum_{i=1}^n m_i (x_i - x_{i-1}) \leq \sum_{i=1}^n f(t_i)(x_i - x_{i-1}) \leq \sum_{i=1}^n M_i (x_i - x_{i-1}) = \bar{I}(\Pi)$$

Siden $\underline{I}(\Pi)$ og $\bar{I}(\Pi)$ begge konvergerer mot $\int_a^b f(x) dx$, så vil også $\sum_{i=1}^n f(t_i)(x_i - x_{i-1})$ også gjøre det. ■

I stedet for å finne polynomet som interpolerer f i alle $x_0, x_1, \dots, x_n$, skal vi interpolere i noen få av disse om gangen, og legge sammen tilnærmingene.

Første mulige strategi: sett $t_i = x_i$, eller $t_i = x_{i-1}$.

Midtpunktsmetoden er en bedre strategi der vi velger

$$t_i = \frac{x_{i-1} + x_i}{2} \quad (\text{midtpunkt på hvert delintervall})$$

$$\begin{aligned} I &\approx \sum_{i=1}^n f((x_i + x_{i-1})/2) \underbrace{(x_i - x_{i-1})}_{h = \frac{b-a}{n}} \\ &= h \sum_{i=1}^n f(\underbrace{x_{i-\frac{1}{2}}}_{(x_i + x_{i-1})/2}) \quad (\text{kalled } I_{\text{mid}}(h) \text{ i boka}) \end{aligned}$$

Feilestimer midtpunktsmetoden

Lokal feil: Feilen over ett delintervall $[x_{i-1}, x_i] = [a, b]$

$$\text{Sett } m = \frac{a+b}{2}$$

$$\text{Feilen er } E = \int_a^b f(x) dx - f(m)(b-a)$$

Taglorutvikling av f om midtpunktet m , av orden 1:

$$f(x) = f(m) + f'(m)(x-m) + \frac{f''(c)}{2} (x-m)^2 \quad (c \in [m, x])$$

integrerer:

$$\begin{aligned} \int_a^b f(x) dx &= \int_a^b \left(f(m) + f'(m)(x-m) + \frac{(x-m)^2}{2} f''(c) \right) dx \\ &= f(m)(b-a) + \underbrace{f'(m) \left[\frac{1}{2} (x-m)^2 \right]_a^b}_0 + \frac{1}{2} \int_a^b (x-m)^2 f''(c) dx \\ &\quad \circ \quad |b-m| = |a-m| \end{aligned}$$

$$= f(m)(b-a) + \frac{1}{2} \int_a^b (x-m)^2 f''(c) dx$$

$$|E| = \left| \int_a^b f(x) dx - f(m)(b-a) \right| = \frac{1}{2} \left| \int_a^b (x-m)^2 f''(c) dx \right|$$

$$\begin{aligned}
 &\leq \frac{1}{2} \int_a^b \underbrace{|f''(c)|}_{\leq M_2} |x-m|^2 dx \leq \frac{M_2}{2} \int_a^b (x-m)^2 dx \\
 &= \frac{M_2}{2} \left[\frac{1}{3} (x-m)^3 \right]_a^b = \frac{M_2}{6} \left(\underbrace{(b-m)^3}_{\frac{b-a}{2}} - \underbrace{(a-m)^3}_{\frac{a-b}{2}} \right) \\
 &= \frac{M_2}{6} \frac{(b-a)^3}{2^3} \cdot 2 = \frac{M_2}{24} (b-a)^3
 \end{aligned}$$

Så: Hvis f har 2. orden kont. deriverte på $[a, b]$, så er
 lokal feil i midtpunktsmetoden

$$\left| \int_a^b f(x) dx - f(m)(b-a) \right| \leq \frac{M_2}{24} (b-a)^3$$

Global feil: Den akkumulerede feilen på alle delintervallene:

$$I = \int_a^b f(x) dx = \sum_{i=1}^n \int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x) dx \quad I_{mid}(h) = \sum_{i=1}^n f(x_{i-\frac{1}{2}}) h$$

$$I - I_{mid}(h) = \sum_{i=1}^n \left(\underbrace{\int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x) dx - f(x_{i-\frac{1}{2}}) h}_{\text{lokal feil.}} \right)$$

$$\begin{aligned}
 |I - I_{mid}(h)| &= \left| \sum_{i=1}^n \int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x) dx - f(x_{i-\frac{1}{2}}) h \right| \\
 &\leq \sum_{i=1}^n \left| \int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x) dx - f(x_{i-\frac{1}{2}}) h \right| \\
 &\stackrel{h=b-a}{\leq} \sum_{i=1}^n \frac{M_2}{24} h^3 = \frac{n M_2}{24} h^3 = (b-a) \frac{h^2}{24} M_2 \\
 &\quad nh = b-a
 \end{aligned}$$

Så: Global feil i midtpunktsmetoden er
 $|I - I_{mid}(h)| \leq (b-a) \frac{h^2}{24} M_2$

h halveres $\Rightarrow$ feil deles på 4.

Hvis vi ønsker global feil $\leq \varepsilon$: Må velge h s.a.

$$(b-a) \frac{h^2}{24} M_2 \leq \varepsilon$$

$$\Downarrow$$
$$\underline{h \leq \sqrt{\frac{24 \varepsilon}{(b-a) M_2}}}$$

Oppgave 12.3 Midtpunktsmetoden med 2 delintervaller på

$$\int_0^1 x^2 dx:$$

Delintervallene er: $[0, \frac{1}{2}]$ og $[\frac{1}{2}, 1]$, $h = \frac{1}{2}$

midtpunktene: $\frac{1}{4}$ $\frac{3}{4}$ $(\sum f(x_{i-\frac{1}{2}}) h)$

$$I_{\text{mid}}(h) = I_{\text{mid}}(\frac{1}{2}) = \frac{1}{2} \left(f(\frac{1}{4}) + f(\frac{3}{4}) \right)$$

$$= \frac{1}{2} \left(\left(\frac{1}{4}\right)^2 + \left(\frac{3}{4}\right)^2 \right) = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{16} + \frac{9}{16} \right)$$

$$= \frac{10}{32} = \frac{5}{16}$$

eksakt verdi: $\int_0^1 x^2 dx = \left[\frac{1}{3} x^3 \right]_0^1 = \frac{1}{3}$

feilen: $\left| \frac{5}{16} - \frac{1}{3} \right| = \left| \frac{15-16}{48} \right| = \frac{1}{48}$

0.0625