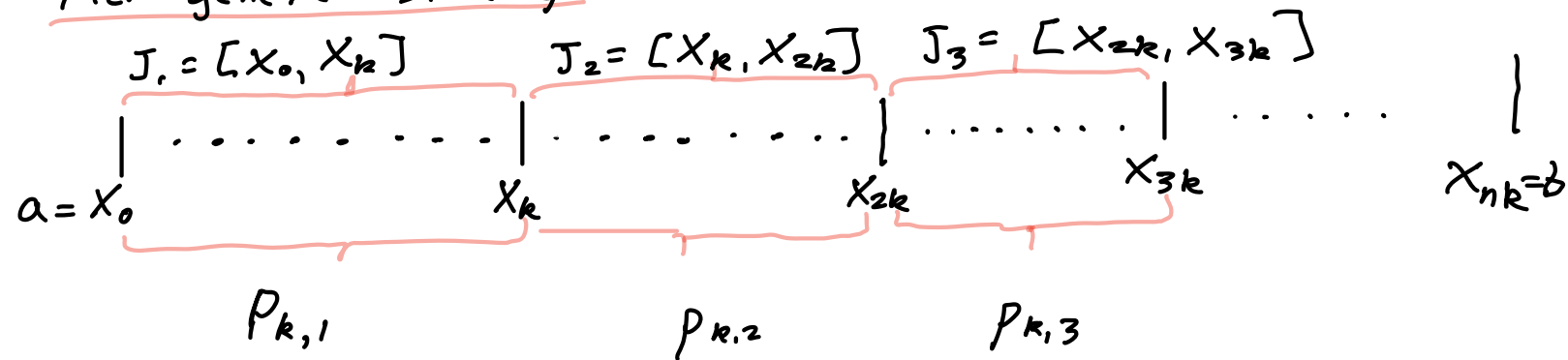


Alternativer til midtpunktsmetoden

Midtpunkt : Interpolerte på $[X_{i-1}, X_i]$ ($i = 1, \dots, n$) med en konstant funksjon.

Mer generell strategi:



n : antall delintervaller ($n = 3$ over)

Til sammen $nk+1$ punkter

$k+1$ punkter i hvert intervall $\rightarrow P_{k,i}$

$$h = \frac{b-a}{n}$$

Lag en tilnærming til $\int_a^b f(x) dx$ ved

1. Å lage en uniform partisjon

$$a = X_0 < X_1 < \dots < X_{nk} = b \quad (nk+1 \text{ punkter})$$

2. For hvert av delintervallene $J_i = [X_{(i-1)k}, \dots, X_{ik}]$, finn polynomet av grad $\leq k$ som interpolerer;

$$P_{k,i} \text{ interpolerer } X_{(i-1)k}, X_{(i-1)k+1}, \dots, X_{ik}$$

3. Bruk $\int_{J_i} P_{k,i}(x) dx$ som tilnærming til $\int_{J_i} f(x) dx$, og

$$I(h) = \sum_{i=1}^n \int_{J_i} P_{k,i}(x) dx \text{ som tilnærming til } \int_a^b f(x) dx$$

Kalles Newton-Cotes av orden k , og steglengde h .

Teorem 12.9 Hvis $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ har $k+1$ kontinuerlige deriverte. Da er feilen $|I - I(h)|$ i Newton-Cotes metoden av orden k , steglengde h , høyst

$$|I - I(h)| \leq \frac{(b-a) M_{k+1}}{(k+1)!} h^{k+1}$$

Beviset bruker teorem 10.7, som her blir

$$|f(x) - p_{k,i}(x)| \leq \frac{M_{k+1}}{(k+1)!} h^{k+1} \quad \text{på } [a, b].$$

$$\begin{aligned} |I - I(h)| &= \left| \int_a^b f(x) dx - \sum_{i=1}^n \int_{J_i} p_{k,i}(x) dx \right| \\ &= \left| \sum_{i=1}^n \int_{J_i} f(x) dx - \sum_{i=1}^n \int_{J_i} p_{k,i}(x) dx \right| \end{aligned}$$

$$= \left| \sum_{i=1}^n \left(\int_{J_i} (f(x) - p_{k,i}(x)) dx \right) \right|$$

$$\leq \sum_{i=1}^n \left| \int_{J_i} (f(x) - p_{k,i}(x)) dx \right|$$

$$\leq \sum_{i=1}^n \int_{J_i} |f(x) - p_{k,i}(x)| dx \quad \text{fra integrasjon.}$$

$$\begin{aligned} &\leq \sum_{i=1}^n \int_{J_i} \frac{M_{k+1}}{(k+1)!} h^{k+1} dx = n \cdot \frac{M_{k+1}}{(k+1)!} h^{k+1} \cdot h \\ &= \underset{nh=b-a}{n} \frac{M_{k+1}}{(k+1)!} h^{k+2} \end{aligned}$$

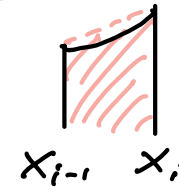
$$= \frac{(b-a) M_{k+1}}{(k+1)!} h^{k+1}$$

Trapesmetoden ($k=1$)

på hvert intervall interpolerer vi i x_{i-1} og x_i , slik at

$$p_{1,i}(x) = f(x_{i-1}) + \frac{f(x_i) - f(x_{i-1})}{h} (x - x_{i-1})$$

Trapes for ett delintervall:

$$\begin{aligned} \int_{x_{i-1}}^{x_i} p_{1,i}(x) dx &= \left[f(x_{i-1})x + \frac{f(x_i) - f(x_{i-1})}{h} \cdot \frac{1}{2} (x - x_{i-1})^2 \right]_{x_{i-1}}^{x_i} \\ &= \underline{f(x_{i-1})h} + \frac{f(x_i) - f(x_{i-1}))}{h} \cdot \frac{1}{2} h^2 \\ &= \frac{h}{2} (f(x_i) + f(x_{i-1})) \end{aligned}$$


for flere intervaller:

$$\begin{aligned} I_{\text{trap}}(h) &= \sum_{i=1}^n \frac{h}{2} (f(x_i) + f(x_{i-1})) \\ &= \underline{h \left(\frac{f(a) + f(b)}{2} + \sum_{i=1}^{n-1} f(x_i) \right)} \end{aligned}$$

Feilestimatet fra teorem 12.9 blir:

$$\frac{(b-a)M_2}{2} h^2$$

h red med faktor 2
 $\Downarrow$
feil red med faktor 4.

Oppgave 12.8 a)

Trapesmetoden med 2 delintervaller for å tilnærme

$$\int_0^1 x^2 dx :$$

$[0, \frac{1}{2}]$, $[\frac{1}{2}, 1]$ (delintervaller).

$$x_0=0, x_1=\frac{1}{2}, x_2=1$$

$$I_{\text{trap}}(h) = \frac{1}{2} \left(\frac{f(0) + f(1)}{2} + f(\frac{1}{2}) \right) = \frac{1}{2} \left(\frac{0+1}{2} + \frac{1}{4} \right) = \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} = \frac{3}{8}$$

$$= 0.3750$$

midtpunkt ga 0.3125

Eksakt: $\int_0^1 x^2 dx = \left[\frac{1}{3} x^3 \right]_0^1 = \frac{1}{3}$ (midtpunkt er litt bedre).

Simpsons metode ($k=2$)

Tilnærmer med et kvadratisk interpolasjonspolynom i hver J_i (interpolerer i $a, m = \frac{a+b}{2}, b$)

oppgave 16:

$$p_2(x) = f(a) + \frac{f(m) - f(a)}{h} (x-a) + \frac{f(a) - 2f(m) + f(b)}{2h^2} (x-a)(x-m),$$

der $h = \frac{b-a}{2}$

oppgave 16:

$$\int_a^b p_2(x) = \frac{h}{3} (f(a) + 4f(m) + f(b))$$

(Simpsons metode med ett delintervall)

$$I_{\text{simp}}(h) = \frac{h}{3} \left(f(a) + f(b) + 4 \sum_{i=1}^n f(x_{2i-1}) + 2 \sum_{i=1}^{n-1} f(x_{2i}) \right)$$

Feilestimatet fra teorem 12.9 blir

$$\frac{(b-a) M_3 h^3}{6}$$

Simpsons metode på $\int_0^1 x^2 dx$, $h = \frac{1}{2}$

$$I_{\text{simp}}\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} \left(f(0) + 4 \cdot \frac{1}{4} + f(1) \right)$$

$$= \frac{1}{6} (1+1) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3},$$

som er eksakt siden $\int_0^1 x^2 dx = \frac{1}{3}$.

Simpsons for $\int_0^1 x^3 dx$:

$$\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} (f(0) + 4f(\frac{1}{2}) + f(1))$$
$$= \frac{1}{6} (0 + 4 \cdot \frac{1}{8} + 1) = \frac{1}{6} (1 + \frac{1}{2}) = \frac{3}{12} = \frac{1}{4}.$$

som er eksakt siden $\int_0^1 x^3 dx = \frac{1}{4}$.

Simpsons for $\int_0^1 x^4 dx$:

$$\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} (f(0) + 4f(\frac{1}{2}) + f(1))$$
$$= \frac{1}{6} \left(\frac{4}{16} + 1 \right) = \frac{1}{6} \frac{20}{16} = \frac{1}{6} \cdot \frac{5}{4} = \frac{5}{24}$$

som ikke er eksakt siden $\int_0^1 x^4 dx = \frac{1}{5} = \frac{5}{25}$