

A avsluttende eksamen 2024

1. Vis: A nilpotent matrise $\Rightarrow A$ ikke inverterbar.

Anta A nilpotent, og anta for motsigelse at A er inverterbar. Inversen er A^{-1}

A nilpotent $\Rightarrow$ finnes k s.a. $A^k = 0$. Da er

$$\underbrace{A^{-1} A^{-1} \dots A^{-1}}_{k \text{ ganger}} \underbrace{A A \dots A}_{k \text{ ganger}} = 0$$

$0 = A^k$

$$A^{-1} A^{-1} \dots (A^{-1} A) A \dots A = \underbrace{A^{-1} \dots A^{-1}}_{k-1 \text{ ganger}} \underbrace{A \dots A}_{k-1 \text{ ganger}} = \dots = A^{-1} A = I.$$

Vi fikk to forskjellige ting for det samme, slik at vi har en motsigelse.

2. utsagn: $x + y$ partall $\Rightarrow x$ og y har lik paritet.

kontrapositive utsagn: x og y har forskjellig paritet $\Rightarrow x + y$ oddetall

en er partall ($2m$)

en er oddetall ($2n+1$)

Da er $x + y = 2m + (2n+1) = 2(m+n) + 1$, som er et oddetall. Det kontrapositive utsagnet følger.

$$3. f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3 : f(x) = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & 0 & 5 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}}_A x + \underbrace{\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}}_{\vec{b}}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ \textcircled{3} & 0 & 5 \\ \textcircled{2} & 1 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & -6 & 5 \\ 0 & -3 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

pivot i hver søyle $\Rightarrow A$ inverterbar.

Anta $f(\vec{x}) = \vec{c}$. Da er $A\vec{x} + \vec{b} = \vec{c}$, og $A\vec{x} = \vec{c} - \vec{b}$,
som har en unik løsning $\vec{x}$ siden A er inverterbar.

Derfor er f surjektiv.

Siden løsningen er unik er f injektiv også.

$$\begin{aligned} \text{(alternativt: } f(\vec{x}_1) = f(\vec{x}_2) &\Leftrightarrow A\vec{x}_1 + \vec{b} = A\vec{x}_2 + \vec{b} \\ A(\vec{x}_1 - \vec{x}_2) &= \vec{0} \Rightarrow \vec{x}_1 - \vec{x}_2 = \vec{0} \\ \vec{x}_1 &\stackrel{\parallel}{=} \vec{x}_2.) \end{aligned}$$

Dermed er f også inverterbar.

f er også veldefinert.

$$\begin{aligned} 4. \quad a) \quad \begin{pmatrix} 2 & 8 & 6 & 1 \\ -4 & -16 & -12 & 2 \\ -1 & -4 & -3 & 1 \end{pmatrix} &\xrightarrow{\text{I} \leftrightarrow \text{III}} \begin{pmatrix} -1 & -4 & -3 & 1 \\ -4 & -16 & -12 & 2 \\ 2 & 8 & 6 & 1 \end{pmatrix} \\ &\xrightarrow{\substack{\text{II} - 4\text{I} \\ \text{III} + 2\text{I}}} \begin{pmatrix} -1 & -4 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & \textcircled{3} \end{pmatrix} \\ &\xrightarrow{\text{III} + \frac{3}{2}\text{II}} \begin{pmatrix} -1 & -4 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Derfor er søyle 1 og 4 pivotsøyle, slik at

$\begin{pmatrix} 2 \\ -4 \\ -1 \end{pmatrix}$ og $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ er en basis for $\text{col } A$.

b) setter inn pivotsøyle slik at alle rader har pivotelement

$$\begin{pmatrix} -1 & -4 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{III} - \frac{3}{2}\text{II}} \begin{pmatrix} -1 & -4 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{matrix} \text{II} + 4\text{I} \\ \text{III} - 2\text{I} \end{matrix} \xrightarrow{\sim} \begin{pmatrix} -1 & -4 & -3 & 1 & 0 \\ -4 & -16 & -12 & 2 & 0 \\ 2 & 8 & 6 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\text{I} \leftrightarrow \text{III} \xrightarrow{\sim} \begin{pmatrix} 2 & 8 & 6 & 1 & 1 \\ -4 & -16 & -12 & 2 & 0 \\ -1 & -4 & -3 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Utrider vi $\begin{pmatrix} 2 \\ -4 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ med $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ får vi en basis for $\mathbb{R}^3$.

5. $A = \begin{pmatrix} 0.7 & 0.8 \\ 0.3 & 0.2 \end{pmatrix}$

$$\begin{aligned} a) \det(A - \lambda I) &= \begin{vmatrix} 0.7 - \lambda & 0.8 \\ 0.3 & 0.2 - \lambda \end{vmatrix} = (0.7 - \lambda)(0.2 - \lambda) - 0.24 \\ &= \lambda^2 - 0.9\lambda - 0.1 \\ \lambda &= \frac{0.9 \pm \sqrt{0.81 + 0.4}}{2} \\ &= \frac{0.9 \pm 1.1}{2} \Rightarrow \lambda_1 = -0.1 \\ &\quad \lambda_2 = 1 \end{aligned}$$

eigenvektor for $\lambda_1 = -0.1$:

$$A - \lambda I = \begin{pmatrix} 0.7 + 0.1 & 0.8 \\ 0.3 & 0.2 + 0.1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.8 & 0.8 \\ 0.3 & 0.3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow x_1 + x_2 = 0 \Rightarrow x_1 = -x_2. \text{ Eigenvektor } \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x_2 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

$$= x_2 \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

$\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ er spesiell egenvektor.

Egenvektor for $\lambda_2 = 1$:

$$A - \lambda I = \begin{pmatrix} -0.3 & 0.8 \\ 0.3 & -0.8 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -\frac{8}{3} \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad x_1 = \frac{8}{3} x_2$$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{8}{3} x_2 \\ x_2 \end{pmatrix} = x_2 \begin{pmatrix} 8/3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$\begin{pmatrix} 8 \\ 3 \end{pmatrix}$ er spesiell egenvektor.

↓) A kan diagonaliseres hvis vi kan skrive $A = PDP^{-1}$, der P er inverterbar, D diagonal.

$$\text{Vi kan sette } P = \begin{pmatrix} -1 & 8 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \Rightarrow P^{-1} = \frac{1}{-3-8} \begin{pmatrix} 3 & -8 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} -1 & 8 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 0 & 1 \end{pmatrix} \sim \dots \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & -3/11 & 8/11 \\ 0 & 1 & 1/11 & 1/11 \end{pmatrix} \nearrow$$

A er ikke symmetrisk $\Rightarrow$ A har ikke ortonormal basis av egenvektorer.

diagonalisering: $A = PDP^{-1}$

$$= \frac{1}{11} \begin{pmatrix} -1 & 8 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -0.1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -3 & 8 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

6a. $f(0) = 0$ $f(1) = -1$ $f(2) = 0$ $f(3) = 9$
 Trapezetoden for $\int_0^3 f(x) dx$ med 3 delintervaller
 $h = 1$

$$\int_0^3 f(x) dx \approx \underbrace{1}_{h} \cdot \left(\frac{f(0) + f(3)}{2} + f(1) + f(2) \right)$$

$$= \frac{0 + 9}{2} - 1 + 0 = \frac{9}{2} - 1 = \underline{\underline{\frac{7}{2}}}$$

b) newtonformen for interpolerende polynom:

$$\begin{aligned} 0 &= c_0 & x_1 - x_0 &= 1 & \Rightarrow c_0 &= 0 \\ -1 &= c_0 + c_1 & x_2 - x_0 &= 2 & \Rightarrow c_1 &= -1 \\ 0 &= c_0 + 2c_1 + 2c_2 & (x_2 - x_0)(x_2 - x_1) &= 2 & \Rightarrow c_2 &= \frac{0 - 0 + 2}{2} = 1 \\ 9 &= c_0 + 3c_1 + 6c_2 + 6c_3 & & & \Rightarrow c_3 &= \frac{9 - 0 + 3 - 6}{6} = 1 \end{aligned}$$

$$p_3(x) = -x + x(x-1) + x(x-1)(x-2)$$

$$p_3(x) = \cancel{-x} + x^2 - \cancel{x} + x^3 - 3x^2 + 2x = x^3 - 2x^2$$

$$p_3'(x) = 3x^2 - 4x \Rightarrow p_3'(1) = 3 - 4 = \underline{\underline{-1}}$$

7. $f(x) = \cos x$. Symmetrisk Newton: $\frac{f(a+h) - f(a-h)}{2h}$

$$f(a+h) = f(a) + f'(a)h + \frac{f''(a)}{2}h^2 + \frac{f'''(c_1)}{6}h^3 \quad c_1 \in [a, a+h]$$

$$f(a-h) = f(a) - f'(a)h + \frac{f''(a)}{2}h^2 - \frac{f'''(c_2)}{6}h^3 \quad c_2 \in [a-h, a]$$

trekk fra hverandre;

$$f(a+h) - f(a-h) = 2f'(a)h + \frac{f'''(c_1)}{6}h^3 + \frac{f'''(c_2)}{6}h^3$$

$$\frac{f(a+h) - f(a-h)}{2h} - f'(a) = \frac{f'''(c_1)}{12}h^2 + \frac{f'''(c_2)}{12}h^2$$

$$\left| \frac{f(a+h) - f(a-h)}{2h} - f'(a) \right| = \left| \frac{f'''(c_1)}{12}h^2 + \frac{f'''(c_2)}{12}h^2 \right|$$

$$\leq \frac{1}{12}h^2 + \frac{1}{12}h^2 = \frac{h^2}{6}$$

For at $\frac{h^2}{6} \leq 6 \cdot 10^{-4}$: $h^2 \leq 36 \cdot 10^{-4}$

$$|h| \leq 6 \cdot 10^{-2} = \underline{0.06}$$