

MAT-INF 1100 avsluttende 2018

2.2 a) $f(0) = -1$, $f(1) = -2$, $f(3) = 2$

$$\begin{aligned} -1 &= c_0 & x_1 - x_0 \\ -2 &= c_0 + c_1 & x_2 - x_0 \quad (x_2 - x_0)(x_2 - x_1) = 3 \cdot 2 \\ 2 &= c_0 + 3c_1 + 6c_2 \end{aligned}$$

$c_0 = -1$

$$c_1 = -2 - c_0 = -2 + 1 = -1$$

$$c_2 = \frac{2 - c_0 - 3c_1}{6} = \frac{2 + 1 + 3}{6} = 1$$

$$\begin{aligned} p_2(x) &= c_0 + c_1(x - x_0) + c_2(x - x_0)(x - x_1) \\ &= -1 - x + x(x - 1) \end{aligned}$$

1.8 Tilnærmingen $f'(a) \approx \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$ er eksakt for:

$$f(x) = 1 : \frac{f(a+h) - f(a)}{h} = \frac{1 - 1}{h} = 0 = f'(a)$$

$$f(x) = x : \frac{f(a+h) - f(a)}{h} = \frac{a+h - a}{h} = 1 = f'(a)$$

$$f(x) = x^2 : \frac{f(a+h) - f(a)}{h} = \frac{(a+h)^2 - a^2}{h} = \frac{2ah + h^2}{h} = 2a + h$$

$f'(x) = 2x$, $f'(a) = 2a$ $\neq$

Derfor: Newtonkvotienten er eksakt for polynomer av grad ≤ 1 .

1.9 $\int_0^4 x^2 dx$. Midtpunktsmetoden med 4 delintervaller ($h=1$).

intervaller: $[0, 1]$, $[1, 2]$, $[2, 3]$, $[3, 4]$

midtpunkter: $\frac{1}{2}$, $\frac{3}{2}$, $\frac{5}{2}$, $\frac{7}{2}$

$$\int_0^4 x^2 dx \approx 1 \cdot \left(f\left(\frac{1}{2}\right) + f\left(\frac{3}{2}\right) + f\left(\frac{5}{2}\right) + f\left(\frac{7}{2}\right) \right)$$

$$= \frac{1}{4} + \frac{9}{4} + \frac{25}{4} + \frac{49}{4} = \frac{84}{4} = 21$$

trapesmetoden:

$$h \left(\frac{f(0) + f(4)}{2} + f(1) + f(2) + f(3) \right)$$

$$= \frac{0 + 16}{2} + 1 + 4 + 9 = 8 + 14 = 22$$

eksakt: $\frac{1}{3} 4^3 = \frac{64}{3} \approx 21.33$ 4.4 bedrø.

Simpsons metode: $h = \frac{b-a}{2n}$ $n=2$

$$h = \frac{b-a}{2n} = \frac{4}{4} = 1$$

$$\frac{h}{3} (f(0) + 4f(1) + 2f(2) + 4f(3) + f(4))$$

$$= \frac{1}{3} (0 + 4 + 8 + 36 + 16) = \frac{64}{3}, \text{ som er eksakt.}$$

Oppgave Sterk induksjon:

Vis at alle heltall $x \geq 12$ kan skrives på formen

$$x = 4y + 5z, \quad y, z \in \mathbb{N}_0$$

Beris: $12 = 4 \cdot 3 + 5 \cdot 0$

$$13 = 4 \cdot 2 + 5 \cdot 1$$

$$14 = 4 \cdot 1 + 5 \cdot 2$$

$$15 = 4 \cdot 0 + 5 \cdot 3$$

Så $P(x)$ er sann for $12 \leq x < 16$

Anta så at $x \geq 16$, og at påstanden er vist sann for alle $12, 13, \dots, x-1$.

Siden $x-4 \geq 12$ så kan vi skrive

$$x-4 = 4y + 5z \quad \text{for } y, z \in \mathbb{N}_0. \text{ Da er}$$

$$x = x - 4 + 4 = 4y + 5z + 4 = 4(\underbrace{y+1}_{\in \mathbb{N}}) + 5z,$$

Slik at x også kan skrives på denne formen.

(vi trengte bare $P(12), P(13), P(14), P(15), P(x-4)$)

Oppgave 3 prøveeksamen MAT1105 2024

$f: A \rightarrow B$ der $\#A = \#B = n$

Vis ved motsigelse at f surjektiv $\Rightarrow f$ injektiv.

Anta f surjektiv, og anta for motsigelse at f ikke injektiv.

Anta $B = \{b_1, \dots, b_n\}$

Siden f er surjektiv finnes $a_i \in A$ s.a. $f(a_i) = b_i$

a_i 'ene er forskjellige, siden b_i 'ene er det, slik at

$$A = \{a_1, \dots, a_n\}$$

Siden f ikke er injektiv finnes a_i, a_j s.a. $f(a_i) = f(a_j)$,

men det er umulig siden $f(a_i) = b_i \neq b_j = f(a_j)$

Derfor må f være injektiv.