

Notat om diagonalisering og systemer av differensiallikninger

Øyvind Ryan

17. Oktober, 2025

Anta A er reell, 2×2 , og diagonaliserbar ($A = PDP^{-1}$). Generell løsning av $x'(t) = Ax(t)$ er da

$$x(t) = Py(t) = \begin{pmatrix} p_1 & p_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_1 e^{\lambda_1 t} \\ C_2 e^{\lambda_2 t} \end{pmatrix} = C_1 e^{\lambda_1 t} p_1 + C_2 e^{\lambda_2 t} p_2,$$

Husk:

- Når A har egenverdier med multiplisitet > 1 er det ikke sikkert at A er diagonaliserbar.
- C_1 og C_2 kan være komplekse.

Proposisjon 8.5 Anta A har reelle egenverdier og at $x(t_0)$ er kjent, og reell. Da finnes det unike reelle konstanter C_1 og C_2 slik at

$$x(t) = C_1 e^{\lambda_1 t} p_1 + C_2 e^{\lambda_2 t} p_2. \quad (1)$$

Eksempel 8.6 $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ har egenverdier $\lambda_1 = -1$, $\lambda_2 = 1$, tilhørende egenvektorer $p_1 = (-1, 1)$ og $p_2 = (1, 1)$. Generell løsning:

$$C_1 e^{-t} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} + C_2 e^t \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -C_1 e^{-t} + C_2 e^t \\ C_1 e^{-t} + C_2 e^t \end{pmatrix},$$

Disse har $f(x) = x$ og $f(x) = -x$ som asymptoter når $t \rightarrow \infty$ og $t \rightarrow -\infty$. Vi kan plote flere løsninger $C_1 e^{\lambda_1 t} p_1 + C_2 e^{\lambda_2 t} p_2$ i samme system ved å variere C_1 og C_2 .

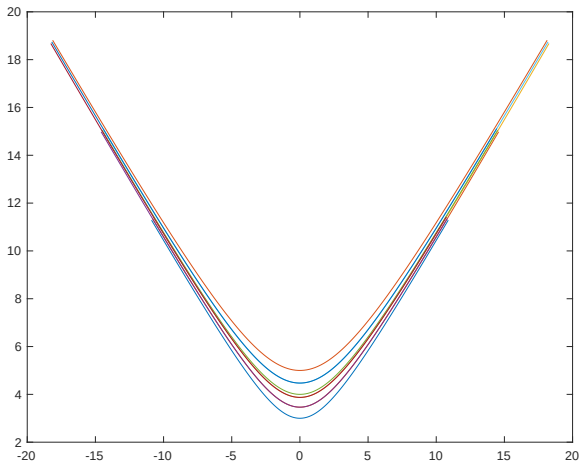


Figure: Løsningene vi får ved å velge $C_i \in \{1.5, 2, 2.5\}$ (ni løsninger).

Proposisjon 8.7 Anta A har komplekse egenverdier λ og $\bar{\lambda}$ (med tilhørende egenvektorer p og $\bar{p}$), og at $x(t_0)$ er kjent, og reell. Da finnes det en konstant C (som kan være kompleks) slik at

$$x(t) = 2\Re(Ce^{\lambda t}p). \quad (2)$$

- Uttrykket $2\Re(C_1 e^{\lambda t} p)$ involverer komplekse tall, men svaret blir reelt.
- Man kan skrive det om slik at det er uten kompleks aritmetikk: La c og d være realdel og imaginærdel til Cp , og la $\lambda = a + ib$. Da er $Cp = c + id$ og $e^{\lambda t} = e^{at}(\cos(bt) + i \sin(bt))$, og vi får

$$\begin{aligned} x(t) &= 2\Re(Ce^{\lambda t}p) = 2\Re(e^{at}(c + id)(\cos(bt) + i \sin(bt))) \\ &= 2e^{at}(\cos(bt)c - \sin(bt)d). \end{aligned}$$

- Reell initialbetingelse gir altså alltid en reell løsning, selv om egenverdier/egenvektorer er komplekse!

Fra denne formen ser vi:

- 1 For $a > 0$: $x(t) \rightarrow \infty$ når $t \rightarrow \infty$ (spiralbevegelse vekk fra origo),
- 2 For $a < 0$: $x(t) \rightarrow 0$ når $t \rightarrow \infty$ (spiralbevegelse inn mot origo),
- 3 For $a = 0$: $x(t)$ er periodisk.

Siden $\cos(bt)$ og $\sin(bt)$ er periodiske med periode $2\pi/b$, så skal et plott over $[0, 2\pi/b]$ vise en arm av spiralbevegelsen i 1. og 2., eller en hel periode i 3..

Kode for å plotte løsningene

Kode under antar at A reell, komplekse egenverdier, initialbet.
 $x(t_0) = x_0$. Egenverdiene/vektorene til A regnes ut, C finnes fra

$$(p \quad \bar{p}) \begin{pmatrix} C e^{\lambda t_0} \\ \bar{C} e^{\bar{\lambda} t_0} \end{pmatrix} = x_0, \quad (3)$$

$Cp = c + id$ regnes ut, og deretter plottes løsningen:

```
[P,D]=eig(A);  
C = P \ x0;  
C = C(1)/exp(D(1,1)*t0);  
c = real(C*P(:,1)); d = imag(C*P(:,1));  
a = real(D(1,1)); b = imag(D(1,1));  
  
t=linspace(t0,t0+4*pi/b,100);  
res = ( c*(cos(b*t).*exp(a*t)) - d*(sin(b*t).*exp(a*t)) ) * 2;  
plot(res(1,:),res(2,:))
```

Vi plotter over $[t_0, t_0 + 4\pi/b]$, så plottet skal vise to armer i eventuelle spiralbevegelser.

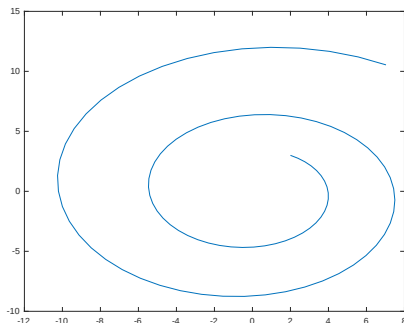
Tilfellet $a > 0$

Matrisen

$$A_1 = \begin{pmatrix} 0.1 & 1 \\ -1 & 0.1 \end{pmatrix}$$

har egenverdier $0.1 \pm i$,

- Siden $a > 0$ får vi en spiralbevegelse vekk fra origo,
- Initialbetingelse $x(2) = (2, 3)$ (løsningen starter i punktet $(2, 3)$).



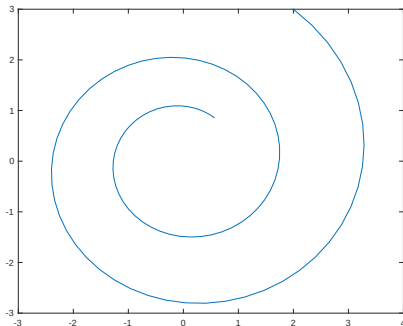
Tilfellet $a < 0$

Matrisen

$$A_2 = \begin{pmatrix} -0.1 & 1 \\ -1 & -0.1 \end{pmatrix}$$

har egenverdier $-0.1 \pm i$.

- Siden $a < 0$ får vi en spiralbevegelse inn mot origo.
- Initialbetingelse $x(2) = (2, 3)$ (løsningen starter i punktet $(2, 3)$).



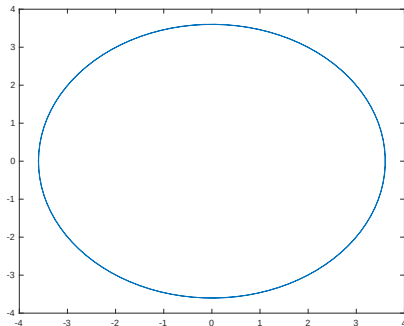
Tilfellet $a = 0$

Matrisen

$$A_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

har egenverdier $\pm i$.

- Siden $a = 0$ får vi en periodisk bevegelse.
- Initialbetingelse $x(2) = (2, 3)$ (løsningen starter i punktet $(2, 3)$).



Andreordens likninger

Setter vi $x_0 = y$, $x_1 = y'$ i andreordenslikningen $y'' + py' + qy = 0$ så får vi skrevet om til systemet

$$\begin{aligned}x_0' &= x_1 \\x_1' &= -qx_0 - px_1\end{aligned}$$

Vi leser ut matrisen $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -q & -p \end{pmatrix}$ og får

$$\det(A - \lambda I) = \lambda(\lambda + p) + q = \lambda^2 + p\lambda + q.$$

Anta egenverdiene λ_1 og λ_2 er forskjellige (samme som at $p^2 \neq 4q$). Da er A diagonaliserbar, og vi har

$$A - \lambda I_2 = \begin{pmatrix} -\lambda & 1 \\ -q & -\lambda - p \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -\lambda & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

slik at $(1, \lambda_1)$, $(1, \lambda_2)$ er spesielle egenvektorer. Vi kan dermed sette

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ \lambda_1 & \lambda_2 \end{pmatrix},$$

og løse systemet som før. Vi trenger initialverdier $y(t_0)$, $y'(t_0)$ for å finne en konkret løsning.