

Foils for Chapter 1 in linear algebra and numerical methods

Øyvind Ryan

2026-07-29

Velkommen til MAT1105 - Lineær algebra og numeriske metoder.

Foreleser: Øyvind Ryan, rom 903 i NHA

Forelesninger: man. 09¹⁵ - 10⁰⁰ (ikke hver uke, følg med på
tir. 12¹⁵ - 14⁰⁰ timeplanen/mine studier)
ons. 10¹⁵ - 12⁰⁰

mandagsforelesninger: Aud. 5 i VB

Alle andre forelesninger i Aud. 1 i VB

Grupper

ons. 12¹⁵ - 14⁰⁰

Tir. 10¹⁵ - 12⁰⁰

ons. 14¹⁵ - 16⁰⁰

Undervisning:

Bruker iPad/PC. Legger ut pdf med notater etter hver forelesning.

Python-eksempler innimellom, også i kompendiet.

Python gis ikke på eksamen - kun for å knytte til IN1900.

Eksamen:

Midtveis: 8/10 09⁰⁰ - 11⁰⁰ (teller 1/3)

Avsluttende: 3/12 09⁰⁰ - 13⁰⁰ (teller 2/3)

Pensum:

1) 7 uker lineær algebra (løse lineære likningssystemer, matriser).

2) 3 uker om matematikkens fundament (mengder, funksjoner, utsagnslogikk, bevisføring)

3) 3 uker numerisk analyse (numeriske metoder, algoritmer for integrasjon/derivasjon, analyse av feilen i metodene).

Pensumlitteratur:

Lynkurs i matematikkens grunnlag (Ulrik Skre Fjordholm)

Lineær algebra og numeriske metoder (Øyvind Ryan)
(oppdateres underveis)

Begge lastes ned på semester siden.

Ukesoppgaver: Egen lenke på kurssiden

Oppgaver til ett kapittel gis luke etter det er forelest.

Obliger

5 obliger der 3 må leveres

Du velger selv hva du leverer (det du føler du trenger tilbakemelding på).

Alle innleveringer blir godkjent, og gitt tilbakemelding på.

Frister: 14³⁰ torsdager.

Kan søke utsettelse innen fristen.

Leveres i Canvas.

Spørsmål?

Vectors

En vektor er en samling av tall, kalt komponenter, listet i en gitt rekkefølge

Vektorer: Små bokstaver, fet skrift/pil: $\vec{a}$, $\vec{b}$, ...

komponenter: Små bokstaver: $a_1, a_2, \dots, a_n$ er komponentene i $\vec{a}$.

Vi skal se på både:

Vektorer med reelle komponenter

$\mathbb{R}^n$

Vektorer med n komplekse komponenter

$\mathbb{C}^n$

$\vec{0}$: Vektoren der alle komponenter er 0.

Creating vectors with Python

```
import numpy as np
```

```
a = np.array([2,4,6,8,10,12,14,16])  
a
```

```
array([ 2,  4,  6,  8, 10, 12, 14, 16])
```

```
np.linspace(0,1,6)
```

```
array([0. , 0.2, 0.4, 0.6, 0.8, 1. ])
```

```
np.arange(1,7)
```

```
array([1, 2, 3, 4, 5, 6])
```

```
np.arange(1,7,2)
```

```
array([1, 3, 5])
```

step length



Kolon-notasjon: bla. for å lage et sett med indekser inn i en vektor.

$a:b : (a, a+1, a+2, \dots)$ alle heltall i $[a, b)$ (b ikke med)

$a:b:h : (a, a+h, a+2h, \dots)$ alle tall i $[a, b)$ (b ikke med)

```
a[0:6]
```

```
array([ 2,  4,  6,  8, 10, 12])
```

```
a[0:6:2]
```

```
array([ 2,  6, 10])
```

```
a[3:]
```

```
array([ 8, 10, 12, 14, 16])
```

```
a[-1]
```

```
np.max(a)
```

16

```
np.min(a)
```

2

```
np.sum(a)
```

72

```
np.prod(a)
```

10321920

Vector addition- and subtraction are defined
component-wise

like mange komponenter

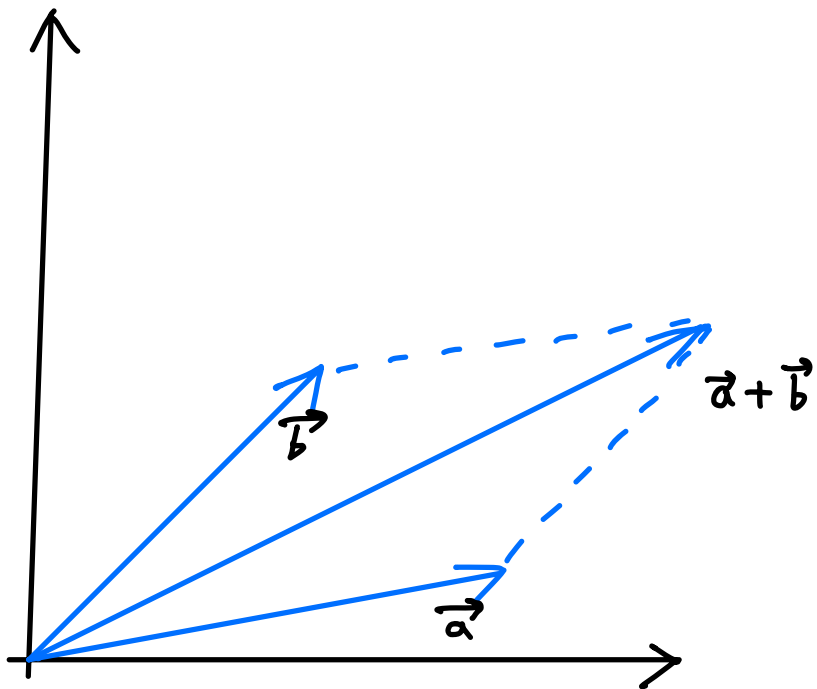
La $\vec{a} = (a_1, a_2, \dots, a_n)$, $\vec{b} = (b_1, b_2, \dots, b_n)$, t skalar
Vi definerer:

$$\vec{a} + \vec{b} = (a_1 + b_1, a_2 + b_2, \dots, a_n + b_n)$$

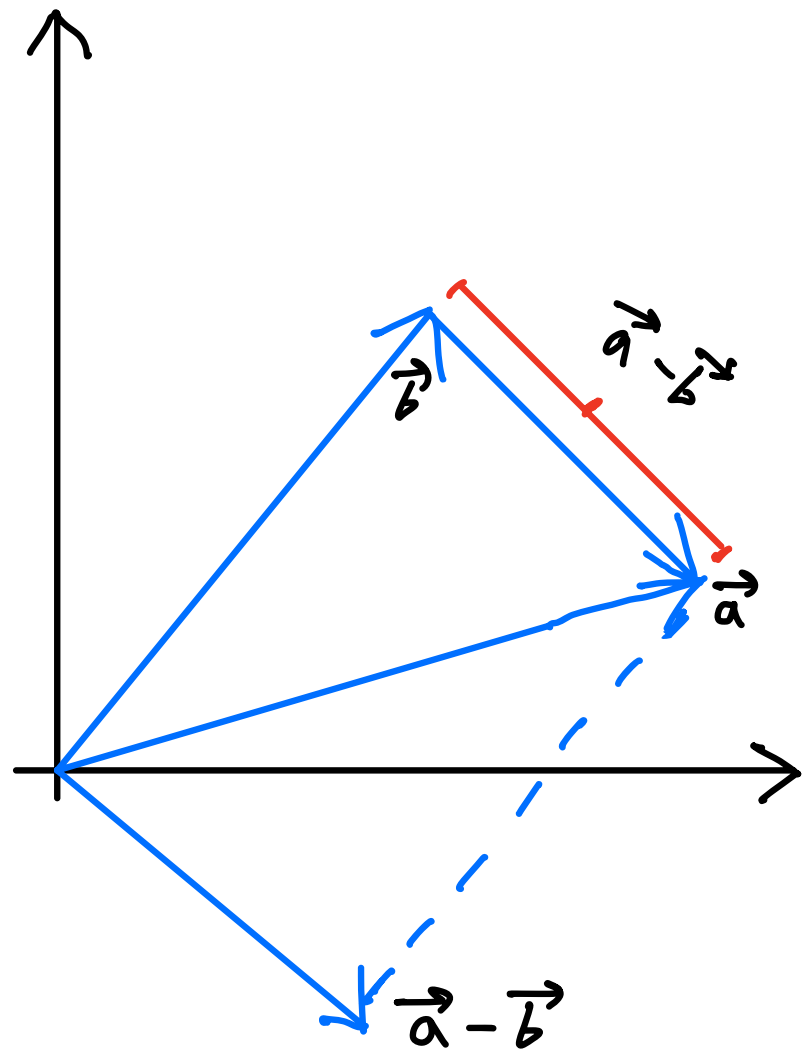
$$\vec{a} - \vec{b} = (a_1 - b_1, a_2 - b_2, \dots, a_n - b_n)$$

$$t\vec{a} = (ta_1, ta_2, \dots, ta_n)$$

$\vec{a}, \vec{b}, t$ kan også være komplekse.



(a) The sum of two vectors



(b) The difference between two vectors

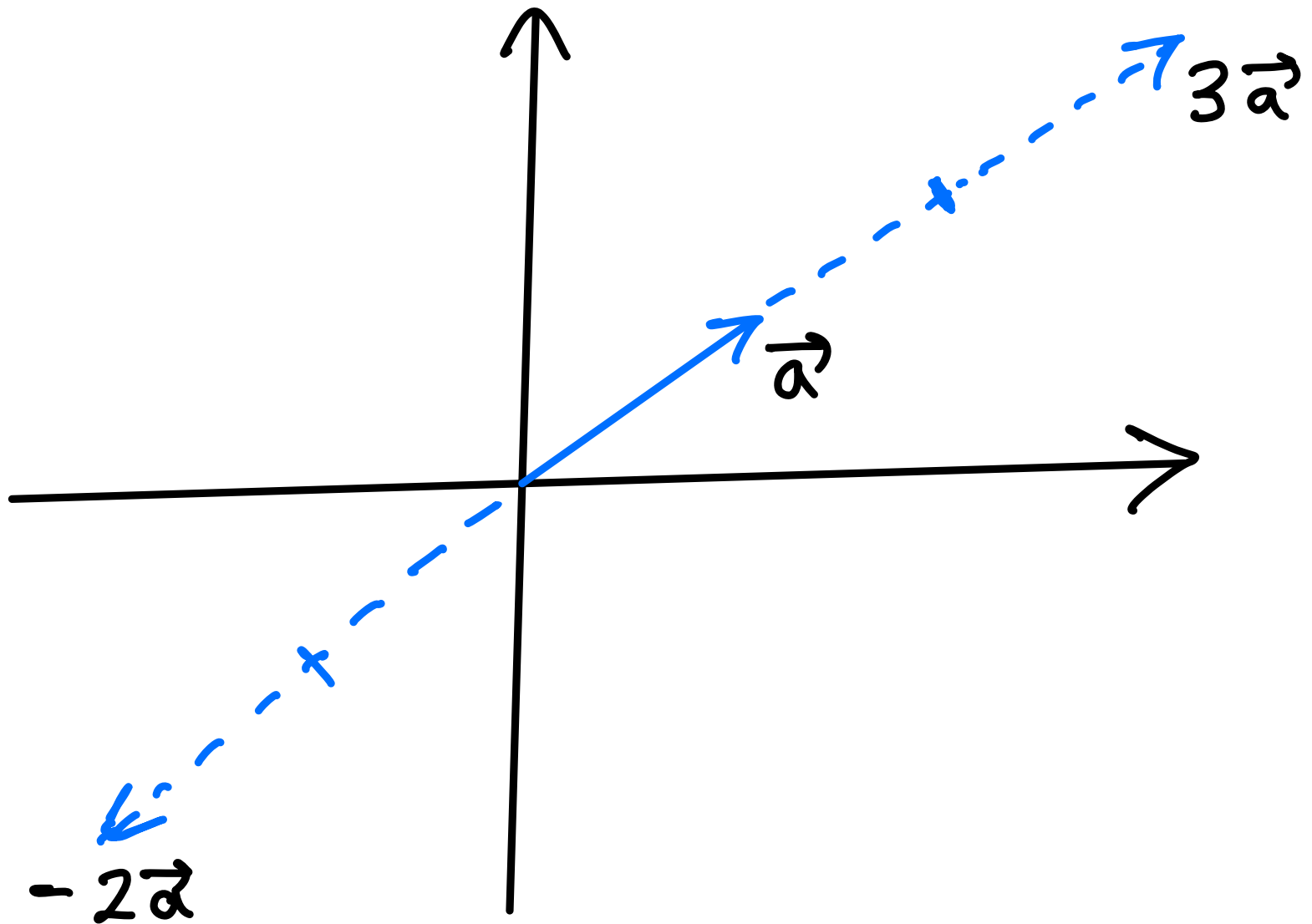


Figure 2: Multiplication of a vector with a scalar

Example with $\mathbf{a} = (1, 2, 3)$, $\mathbf{b} = (4, 5, 6)$, and $t = 2$

$$\vec{a} + \vec{b} = (1, 2, 3) + (4, 5, 6) = (1+4, 2+5, 3+6) = (5, 7, 9)$$

$$\vec{a} - \vec{b} = (1, 2, 3) - (4, 5, 6) = (1-4, 2-5, 3-6) = (-3, -3, -3)$$

$$t\vec{a} = 2 \cdot (1, 2, 3) = (2 \cdot 1, 2 \cdot 2, 2 \cdot 3) = (2, 4, 6)$$

Example with Python

```
a = np.array([1,2,3])  
b = np.array([4,5,6])  
t = 2  
a + b
```

```
array([5, 7, 9])
```

```
a-b
```

```
array([-3, -3, -3])
```

```
t*a
```

```
array([2, 4, 6])
```

Deviation between mathematical notation and python:

```
a+t
```

```
array([3, 4, 5])
```

Vectorised functions

Hvis f er en funksjon på $\mathbb{R}$ eller $\mathbb{C}$:

Vektoriseringen av f er definert på $\mathbb{R}^n$ eller $\mathbb{C}^n$ ved

$$f(a_1, a_2, \dots, a_n) = (f(a_1), f(a_2), \dots, f(a_n))$$

for alle $\vec{a} \in \mathbb{R}^n / \mathbb{C}^n$

De fleste funksjoner i Python vektoriseres.

Examples of vectorised functions

```
np.sqrt(np.array([1,4,9,16]))
```

$$f(x) = \sqrt{x}$$

```
array([1., 2., 3., 4.])
```

```
np.abs(np.array([-2,-1,1,2]))
```

$$f(x) = |x|$$

```
array([2, 1, 1, 2])
```

```
np.sin(np.array([0,np.pi/2,np.pi,3*np.pi/2,2*np.pi]))
```

$$f(x) = \sin x$$

```
array([ 0.00000000e+00,  1.00000000e+00,
        1.2246468e-16, -1.00000000e+00,
       -2.4492936e-16])
```

```
np.exp(np.log(np.array([1,2,3])))
```

```
array([1., 2., 3.])
```

```
np.log(np.exp(np.array([0,1,2])))
```

```
array([0., 1., 2.])
```

Vectorised binary functions

Hvis f er en funksjon på $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ eller $\mathbb{C} \times \mathbb{C}$ $\left(\begin{array}{l} \text{som } f(x,y) = x+y \\ f(x,y) = xy \\ f(x,y) = x^y \end{array} \right)$

Vektoriseringen av f er definert på $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ eller $\mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^n$ ved

$$f(\vec{a}, \vec{b}) = (f(a_1, b_1), f(a_2, b_2), \dots, f(a_n, b_n))$$

Vektoriseringen av $f(x,y) = x+y$ faller sammen med definisjonen av vektoraddisjon over.

Examples of vectorised binary functions

$$\vec{a} = (1, 2, 3) \quad \vec{b} = (4, 5, 6)$$

```
np.maximum(a,b)
```

$$f(x,y) = \max(x,y)$$
$$\text{array}([4, 5, 6])$$

```
np.minimum(a,b)
```

$$f(x,y) = \min(x,y)$$
$$\text{array}([1, 2, 3])$$

```
a*b
```

$$f(x,y) = x \cdot y$$
$$\text{array}([4, 10, 18])$$

```
a**b
```

$$f(x,y) = x^y$$
$$\text{array}([1, 32, 729])$$

egentlig ikke definert

$$f(\vec{a}, \vec{b}) = \vec{a}^{\vec{b}} = (a_1^{b_1}, a_2^{b_2}, \dots, a_n^{b_n})$$
$$= (1^4, 2^5, 3^6) = (1, 32, 729).$$

Proposition

We have that

1. $\mathbf{a} + \mathbf{b} = \mathbf{b} + \mathbf{a}$
2. $(\mathbf{a} + \mathbf{b}) + \mathbf{c} = \mathbf{a} + (\mathbf{b} + \mathbf{c})$
3. $s(\mathbf{a} + \mathbf{b}) = s\mathbf{a} + s\mathbf{b}$
4. $(s + t)\mathbf{a} = s\mathbf{a} + t\mathbf{a}$,

where $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, and $\mathbf{c}$ are vectors, and s and t are scalars.

Proof for 3:
$$\begin{aligned} s(\vec{a} + \vec{b}) &= s((a_1, \dots, a_n) + (b_1, \dots, b_n)) \\ &= s(a_1 + b_1, \dots, a_n + b_n) \\ &= (s(a_1 + b_1), \dots, s(a_n + b_n)) \\ &= (sa_1 + sb_1, \dots, sa_n + sb_n) \\ &= (sa_1, \dots, sa_n) + (sb_1, \dots, sb_n) \\ &= s(a_1, \dots, a_n) + s(b_1, \dots, b_n) = s\vec{a} + s\vec{b}, \text{ OK} \end{aligned}$$

Bevis for 4., komponentvis (nok å vise at VS og HS har samme komponenter)

VS: komponent i er $(s+t)a_i$

HS: komponent i i $s\vec{a}$ er sa_i

komponent i i $t\vec{a}$ er ta_i

komponent i i $s\vec{a}+t\vec{a}$ er sa_i+ta_i

like, egenskap ved de reelle tall.

How to find the expression for a line between two points

Linjen gjennom to punkter $\vec{x}_1$ og $\vec{x}_2$ har retningsvektor $\vec{x}_2 - \vec{x}_1$

Linjen kan parametriseres ved $\vec{y}(t) = \vec{x}_1 + t(\vec{x}_2 - \vec{x}_1)$

$$\vec{y}(0) = \vec{x}_1 \quad \vec{y}(1) = \vec{x}_1 + \vec{x}_2 - \vec{x}_1 = \vec{x}_2$$

Length and scalar product in $\mathbb{R}^n$

Let $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathbb{R}^n$

► The *length* of $\mathbf{a}$ is defined as

$$|\mathbf{a}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2}.$$

► The *scalar product* $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}$ is defined as

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = a_1 b_1 + a_2 b_2 + \cdots + a_n b_n.$$

We say that $\mathbf{a}$ and $\mathbf{b}$ are *orthogonal* if $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = 0$.

Example with $\mathbf{a} = (1, -4, 9)$ and $\mathbf{b} = (2, 3, -6)$

$$|\vec{a}| = |(1, -4, 9)| = \sqrt{1^2 + (-4)^2 + 9^2} = \sqrt{1 + 16 + 81} = \sqrt{98} = \sqrt{2 \cdot 49} = 7\sqrt{2}$$

$$|\vec{b}| = |(2, 3, -6)| = \sqrt{2^2 + 3^2 + (-6)^2} = \sqrt{4 + 9 + 36} = \sqrt{49} = 7$$

$$\begin{aligned}\vec{a} \cdot \vec{b} &= (1, -4, 9) \cdot (2, 3, -6) = 1 \cdot 2 + (-4) \cdot 3 + 9 \cdot (-6) \\ &= 2 - 12 - 54 = -64,\end{aligned}$$

så $\vec{a}$ og $\vec{b}$ er ikke ortogonale

Computing length in Python

```
a=np.array([3,4])  
np.linalg.norm(a)
```

5.0

This can also be programmed as follows

```
np.sqrt(np.sum(np.abs(a)**2))
```

5.0

Her er "opphevd i andre potens" vektorisert.

Proposition (Properties of the scalar product)

For all vectors $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ in $\mathbb{R}^n$, and scalars s , we have that

1. $\mathbf{a} \cdot \mathbf{a} = |\mathbf{a}|^2$,
2. $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = \mathbf{b} \cdot \mathbf{a}$,
3. $\mathbf{c} \cdot (\mathbf{a} + \mathbf{b}) = \mathbf{c} \cdot \mathbf{a} + \mathbf{c} \cdot \mathbf{b}$ and $(\mathbf{a} + \mathbf{b}) \cdot \mathbf{c} = \mathbf{a} \cdot \mathbf{c} + \mathbf{b} \cdot \mathbf{c}$,
4. $(s\mathbf{a}) \cdot \mathbf{b} = \mathbf{a} \cdot (s\mathbf{b}) = s(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})$

Bevis første del på 3:

$$\begin{aligned} \forall s: \quad \vec{c} \cdot (\vec{a} + \vec{b}) &= (c_1, \dots, c_n) \cdot (a_1 + b_1, \dots, a_n + b_n) \\ &= c_1(a_1 + b_1) + \dots + c_n(a_n + b_n) \\ &= \underline{c_1 a_1 + c_1 b_1} + \dots + c_n a_n + c_n b_n \end{aligned}$$

Like!

$$\begin{aligned}
 HS: \vec{c} \cdot \vec{a} + \vec{c} \cdot \vec{b} &= (c_1, \dots, c_n) \cdot (a_1, \dots, a_n) + (c_1, \dots, c_n) \cdot (b_1, \dots, b_n) \\
 &= \underline{c_1 a_1} + \dots + c_n a_n + \underline{c_1 b_1} + \dots + c_n b_n
 \end{aligned}$$

Beweis für 4.:

$$(s\vec{a}) \cdot \vec{b} = (sa_1, \dots, sa_n) \cdot (b_1, \dots, b_n) = sa_1 b_1 + \dots + sa_n b_n$$

$$\vec{a} \cdot (s\vec{b}) = (a_1, \dots, a_n) \cdot (sb_1, \dots, sb_n) = sa_1 b_1 + \dots + sa_n b_n$$

$$s(\vec{a} \cdot \vec{b}) = s(a_1 b_1 + \dots + a_n b_n) = sa_1 b_1 + \dots + sa_n b_n$$

Alle tre ble like!

Length and scalar product in $\mathbb{C}^n$

More generally, if $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathbb{C}^n$:

- The *length* of $\mathbf{a}$ is defined as

$$|\mathbf{a}| = \sqrt{|a_1|^2 + |a_2|^2 + \dots + |a_n|^2}.$$

- The (complex) scalar product $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}$ is defined as

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = a_1 \overline{b_1} + \dots + a_n \overline{b_n}.$$

$$\begin{aligned} \vec{a} \cdot \vec{a} &= a_1 \overline{a_1} + \dots + a_n \overline{a_n} \\ &= |a_1|^2 + \dots + |a_n|^2 \end{aligned}$$

Hvorfor definerer vi med abs. verdi?
 $\sqrt{|a_1|^2 + \dots + |a_n|^2}$ blir komplekst hvis a_i er det, og vi vil at lengde skal være en positiv størrelse.

Med den nye definisjonen får vi at

$$|\vec{a}|^2 = \vec{a} \cdot \vec{a},$$

som er kompatibelt med det reelle tilfellet og for $n=1$:

$$i^2 = -1 \quad iy \cdot (-iy)$$

$$a \cdot a = a\bar{a} = (x+iy)(x-iy) = x^2 + y^2 \\ = |a|^2$$

Proposition (Properties of the complex scalar product)

Assume that $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c} \in \mathbb{C}^n$, and that $s \in \mathbb{C}$. If $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}$ is the complex scalar product we have that

1. $\mathbf{a} \cdot \mathbf{a} = |\mathbf{a}|^2$,
2. $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = \overline{\mathbf{b} \cdot \mathbf{a}}$,
3. $\mathbf{c} \cdot (\mathbf{a} + \mathbf{b}) = \mathbf{c} \cdot \mathbf{a} + \mathbf{c} \cdot \mathbf{b}$ and $(\mathbf{a} + \mathbf{b}) \cdot \mathbf{c} = \mathbf{a} \cdot \mathbf{c} + \mathbf{b} \cdot \mathbf{c}$,
4. $(s\mathbf{a}) \cdot \mathbf{b} = s(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})$ and $\mathbf{a} \cdot (s\mathbf{b}) = \bar{s}(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})$,

Proof 2: $\vec{a} \cdot \vec{b} \stackrel{\text{def}}{=} a_1 \bar{b}_1 + \dots + a_n \bar{b}_n$ like

$$\begin{aligned} \overline{\vec{b} \cdot \vec{a}} &= \overline{b_1 \bar{a}_1 + \dots + b_n \bar{a}_n} = \overline{b_1 \bar{a}_1} + \dots + \overline{b_n \bar{a}_n} \\ &= \bar{b}_1 \overline{\bar{a}_1} + \dots + \bar{b}_n \overline{\bar{a}_n} = \bar{b}_1 a_1 + \dots + \bar{b}_n a_n \end{aligned}$$

Bevis for 4., del 2

$$\begin{aligned} \text{VS: } \vec{a} \cdot (\vec{s}\vec{b}) &= a_1 \overline{(sb_1)} + \dots + a_n \overline{(sb_n)} \\ &= a_1 \bar{s} \bar{b}_1 + \dots + a_n \bar{s} \bar{b}_n \\ &= \bar{s} (a_1 \bar{b}_1 + \dots + a_n \bar{b}_n) \\ &= \bar{s} (\vec{a} \cdot \vec{b}) \quad \blacksquare \end{aligned}$$

Example with $\mathbf{a} = (2i, 1 + i, 3)$, $\mathbf{b} = (1 + 2i, -1, 2 - i)$

$$|2i|^2 = \underline{4}$$

$$|1+2i|^2 = \underline{5}$$

$$|1+i|^2 = (\sqrt{1^2+1^2})^2 = \underline{2}$$

$$|(-1)|^2 = \underline{1}$$

$$|3|^2 = \underline{9}$$

$$|2-i|^2 = \underline{5}$$

$$|\vec{a}| = \sqrt{4+2+9} = \sqrt{15} \quad |\vec{b}| = \sqrt{5+1+5} = \sqrt{11}$$

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = a_1 \bar{b}_1 + a_2 \bar{b}_2 + a_3 \bar{b}_3$$

$$= 2i(1-2i) + (1+i)(-1) + 3 \cdot (2+i)$$

$$= 2i - 4i^2 - 1 - i + 6 + 3i$$

$$= 2i + \underline{4} - \underline{1} - i + \underline{6} + 3i$$

$$= 9 + 4i$$

```
a = np.array([2j, 1+1j, 3])  
b = np.array([1+2j, -1, 2-1j])  
np.vdot(a, b)
```

(9-4j)

```
np.sum(np.conj(a)*b)
```

(9-4j)

Som er det konjugerte at det vi fikk tidligere!

Dette skyldes at det finnes to konkurrerende definisjoner av det komplekse skalarproduktet.

How to find an expression for the plane passing through a given point (x_0, y_0, z_0) , and which is orthogonal to a given vector $\mathbf{n} = (a, b, c)$.

(x, y, z) ligger i dette planet hvis og bare hvis $(x, y, z) - (x_0, y_0, z_0)$ er orthogonal på $\vec{n}$:

$$\begin{aligned} 0 &= ((x, y, z) - (x_0, y_0, z_0)) \cdot (a, b, c) \\ &= (x - x_0, y - y_0, z - z_0) \cdot (a, b, c) \\ &= a(\underline{x - x_0}) + b(\underline{y - y_0}) + c(\underline{z - z_0}) \end{aligned}$$

Man skriver:

$$ax + by + cz = \underbrace{ax_0 + by_0 + cz_0}_d$$

$$ax + by + cz = d$$

A generalisation of Pythagoras theorem

$$\overline{\vec{a} \cdot \vec{b}} = \overline{0} = 0$$

Hvis $\vec{a}$ og $\vec{b}$ er ortogonale så er

$$\begin{aligned} |\vec{a} + \vec{b}|^2 &= (\vec{a} + \vec{b}) \cdot (\vec{a} + \vec{b}) = \vec{a} \cdot \vec{a} + \underbrace{\vec{a} \cdot \vec{b}}_0 + \vec{b} \cdot \vec{a} + \vec{b} \cdot \vec{b} \\ &= |\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2 \end{aligned}$$

Slik at $|\vec{a} + \vec{b}|^2 = |\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2$ når $\vec{a}$ og $\vec{b}$ er ortogonale.

Hvis vi setter $n=2$, $\underbrace{\vec{a} = (a, 0)}_{|\vec{a}|=a}$, $\underbrace{\vec{b} = (0, b)}_{|\vec{b}|=b}$, $\underbrace{\vec{c} = \vec{a} + \vec{b} = (a, b)}_{|\vec{c}|=c}$
ortogonale

$$|\vec{a} + \vec{b}|^2 = |\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2 \text{ sier da at } \underset{\substack{\uparrow \\ \text{hypotenus}}}{c^2} = \underset{\substack{\uparrow \\ \text{katet}}}{a^2} + \underset{\substack{\uparrow \\ \text{katet}}}{b^2},$$

Som er Pythagoras.

Generalisering til n dimensjoner (og komplekse tall).

Projection

$\mathbf{p} = \frac{\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}}{|\mathbf{b}|^2} \mathbf{b}$ is the unique point on the line between $\mathbf{0}$ and $\mathbf{b}$ so that $\mathbf{a} - \mathbf{p}$ and $\mathbf{p}$ are orthogonal. $\mathbf{p}$ is also the closest point to $\mathbf{a}$ on this line. It is also called the *projection* of $\mathbf{a}$ onto the line.

The decomposition

$$\mathbf{a} = \frac{\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}}{|\mathbf{b}|^2} \mathbf{b} + \left(\mathbf{a} - \frac{\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}}{|\mathbf{b}|^2} \mathbf{b} \right)$$

splits $\mathbf{a}$ in a sum where one vector is parallel to $\mathbf{b}$, and the other orthogonal to $\mathbf{b}$. This is also called an *orthogonal decomposition*.

```
np.vdot(b,a)*b/np.linalg.norm(b**2)
```

```
array([ 0.14002801+3.08061618j,  
       -1.26025208-0.56011203j,  
       3.08061618-0.14002801j])
```

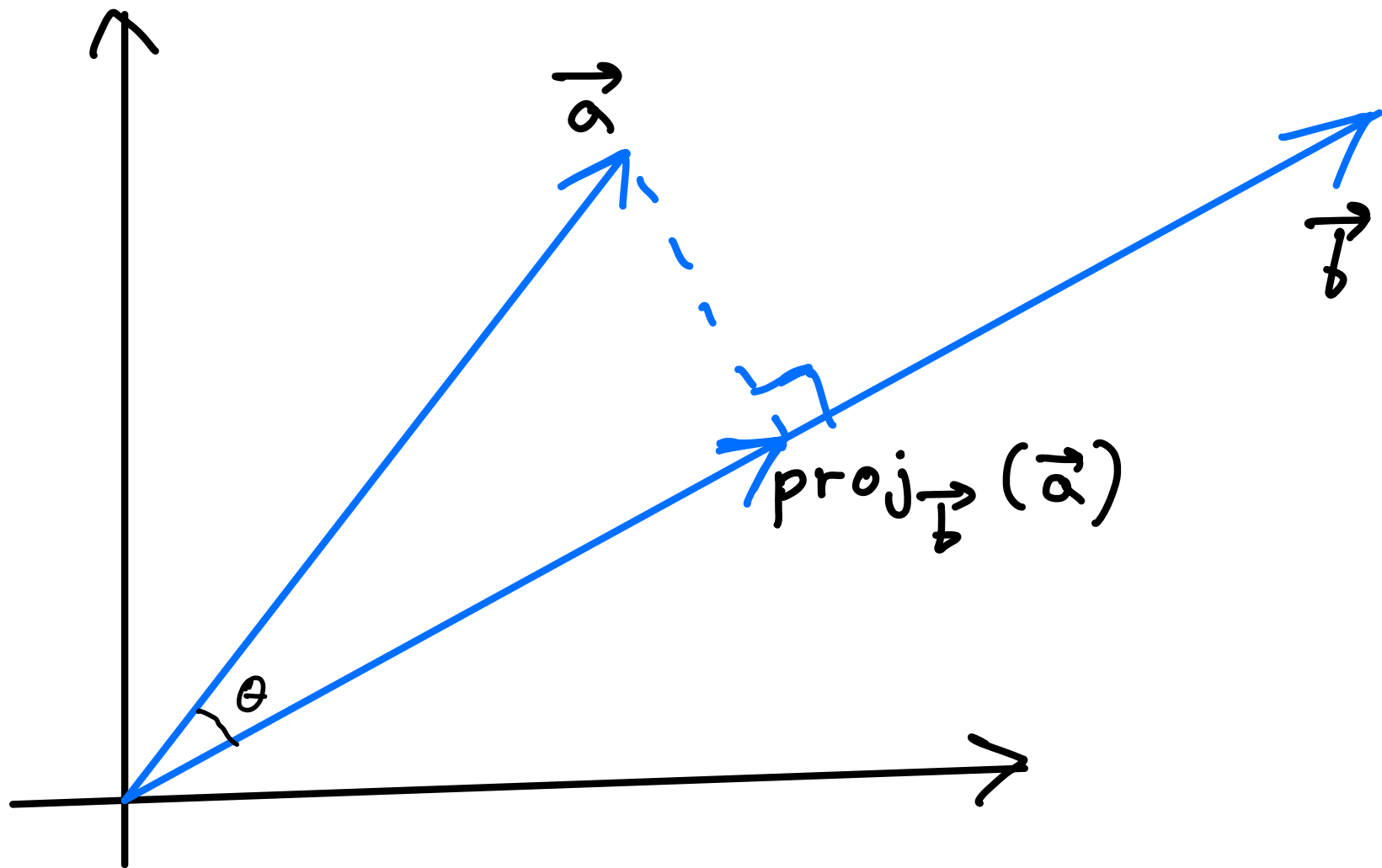


Figure 3: Projection of the vector $\vec{a}$ onto the vector $\vec{b}$ in the plane.

Proof

at $\vec{p} = c\vec{b}$ er ortogonal på $\vec{a} - c\vec{b}$ er
det samme som at

$$0 = (\vec{a} - c\vec{b}) \cdot \vec{b} = \underline{\vec{a} \cdot \vec{b}} - \underline{c|\vec{b}|^2}$$

som er det samme som $c = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{b}|^2}$, slik at

$$\vec{p} = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{b}|^2} \vec{b}, \text{ som er det vi skulle fram til.}$$

$\vec{p}$ er den unike vektoren på linja gjennom 0 og $\vec{b}$
som er nærmest $\vec{a}$:

For $s \in \mathbb{C}$: parallell med $\vec{b}$, og $\vec{p}$

$$\underline{|\vec{a} - s\vec{b}|^2} = \left| \underbrace{(\vec{a} - \vec{p})}_{\text{ortogonal}} + \underbrace{(\vec{p} - s\vec{b})}_{\text{parallel med } \vec{b}} \right|^2$$

$$\begin{array}{l} \text{Pythagoras} \\ = |\vec{a} - \vec{p}|^2 + \underline{|\vec{p} - s\vec{b}|^2} \geq \underline{|\vec{a} - \vec{p}|^2} \end{array}$$

Siden dette gjelder for alle s : $\vec{p}$ er det nærmeste punktet
til $\vec{a}$ på linja.

Example with $\mathbf{a} = (10, 5)$, $\mathbf{b} = (2, 4)$

$$|\vec{b}|^2 = 2^2 + 4^2 = 4 + 16 = 20$$

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = (10, 5) \cdot (2, 4) = 10 \cdot 2 + 5 \cdot 4 = 20 + 20 = 40$$

$$\text{proj}_{\vec{b}} \vec{a} = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{b}|^2} \vec{b} = \frac{40}{20} (2, 4) = 2(2, 4) = \underline{(4, 8)}$$

$$\vec{a} - \text{proj}_{\vec{b}} \vec{a} = (10, 5) - (4, 8) = (10 - 4, 5 - 8) = \underline{(6, -3)}$$

Derfor er $(10, 5) = \underbrace{(4, 8)}_{\text{proj}_{\vec{b}} \vec{a}} + \underbrace{(6, -3)}_{\vec{a} - \text{proj}_{\vec{b}} \vec{a}}$ en ortogonal dekomposisjon av $\vec{a}$

Observations from the figure

La θ være vinkelen gjennom $\vec{a}$ og $\vec{b}$

Vi har at $\frac{|\text{proj}_{\vec{b}} \vec{a}|}{|\vec{a}|} = \cos \theta$ (katet/hypotenus)

$$\frac{\left| \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{b}|^2} \vec{b} \right|}{|\vec{a}|} = \frac{\frac{|\vec{a} \cdot \vec{b}|}{|\vec{b}|^2} |\vec{b}|}{|\vec{a}|} = \frac{|\vec{a} \cdot \vec{b}|}{|\vec{a}| |\vec{b}|} = \cos \theta \quad 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$$

Det følger at $|\vec{a} \cdot \vec{b}| \stackrel{VS}{=} |\vec{a}| |\vec{b}| \cos \theta \stackrel{HS}{=}$

Utleddning av trigonometrisk identitet:

sett $\vec{a} = (\cos \theta_1, \sin \theta_1)$, $\vec{b} = (\cos \theta_2, \sin \theta_2)$, $\theta = \theta_2 - \theta_1$,

Da er $|\vec{a}| = 1$, $|\vec{b}| = 1$, $\vec{a} \cdot \vec{b} = \cos \theta_1 \cos \theta_2 + \sin \theta_1 \sin \theta_2$

VS: $\cos \theta_1 \cos \theta_2 + \sin \theta_1 \sin \theta_2$

HS: $(\cdot) \cdot \cos \theta = \cos(\theta_2 - \theta_1)$ ↗ like, kjent trigonometrisk identitet.

Some important results

Proposition (Schwarz' inequality)

We have that $|\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}| \leq |\mathbf{a}||\mathbf{b}|$ for all vectors $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathbb{C}^n$. We have equality if and only if either $\mathbf{a}$ or $\mathbf{b}$ are parallel, or at least one of $\mathbf{a}$ and $\mathbf{b}$ is 0.

Proposition (The triangle inequality)

We have that $|\mathbf{a} + \mathbf{b}| \leq |\mathbf{a}| + |\mathbf{b}|$ for all vectors $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathbb{C}^n$. We have equality if and only if either $\mathbf{a} = s\mathbf{b}$ for an $s > 0$, or at least one of $\mathbf{a}$ and $\mathbf{b}$ is 0 (The shortest distance to a point is a straight line).

Proofs

Bevis Schwarz: $|\vec{a} \cdot \vec{b}| \leq |\vec{a}| |\vec{b}|$; planet følger fra at
 $|\vec{a} \cdot \vec{b}| = |\vec{a}| |\vec{b}| \cos \theta$, og $|\cos \theta| \leq 1$.

Mer generelt bruker vi Pythagoras:

$$|\vec{a}|^2 = |\vec{a} - \text{proj}_{\vec{b}} \vec{a}|^2 + |\text{proj}_{\vec{b}} \vec{a}|^2 \geq |\text{proj}_{\vec{b}} \vec{a}|^2$$

Ta kvadratrøtter:

$$|\vec{a}| \geq |\text{proj}_{\vec{b}} \vec{a}| = \left| \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{b}|^2} \vec{b} \right| = \frac{|\vec{a} \cdot \vec{b}|}{|\vec{b}|}$$

$$\Downarrow$$
$$|\vec{a}| |\vec{b}| \geq |\vec{a} \cdot \vec{b}| \Leftrightarrow |\vec{a} \cdot \vec{b}| \leq |\vec{a}| |\vec{b}|$$

Likhet: Schwarz ulikhet: når minst en av $\vec{a}, \vec{b}$ er $\vec{0}$

Hvis både $\vec{a}$ og $\vec{b}$ er $\neq \vec{0}$:

Likhet kun når $\vec{a} = \text{proj}_{\vec{b}} \vec{a}$.

Dette skjer hvis og bare hvis $\vec{a}$ og $\vec{b}$ er parallelle.

Bevis trekantulikheden

$$\begin{aligned} |\vec{a} + \vec{b}|^2 &= (\vec{a} + \vec{b}) \cdot (\vec{a} + \vec{b}) \\ &= \vec{a} \cdot \vec{a} + \vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{b} \cdot \vec{a} + \vec{b} \cdot \vec{b} \\ &= |\vec{a}|^2 + \vec{a} \cdot \vec{b} + \overline{\vec{a} \cdot \vec{b}} + |\vec{b}|^2 \\ &= |\vec{a}|^2 + 2 \operatorname{Re}(\vec{a} \cdot \vec{b}) + |\vec{b}|^2 \\ &\leq |\vec{a}|^2 + 2 |\vec{a} \cdot \vec{b}| + |\vec{b}|^2 \\ &\stackrel{\text{Schwarz}}{\leq} |\vec{a}|^2 + 2 |\vec{a}| |\vec{b}| + |\vec{b}|^2 \\ &= (|\vec{a}| + |\vec{b}|)^2 \end{aligned}$$

Ta kvadratrotter: $|\vec{a} + \vec{b}| \leq |\vec{a}| + |\vec{b}|$, som vi skulle vise.

Likhet: når minst en af $\vec{a}$ og $\vec{b}$ er $\vec{0}$.

Begge $\neq \vec{0}$: Må ha likhet i Schwarz ulikhet
 $\Rightarrow \vec{a}, \vec{b}$ parallelle, s.o. $\vec{b} = s\vec{a}$

Må også ha $\operatorname{Re}(\vec{a} \cdot \vec{b}) = |\vec{a} \cdot \vec{b}|$

$$\vec{b} = s\vec{a} \quad |s| |\vec{a}|^2$$

$$\operatorname{Re}(\vec{a} \cdot (s\vec{a})) = \operatorname{Re}(\bar{s} |\vec{a}|^2) = |\vec{a}|^2 \operatorname{Re} \bar{s} = |s| |\vec{a}|^2$$

Så likhet kun når $|\vec{a}|^2 \operatorname{Re} \bar{s} = |s| |\vec{a}|^2$

$$\operatorname{Re} \bar{s} = |s|$$

skjer kun når s er reell og positiv.