

Forelesning 1/9

1. Oblig 1 innleveringsfrist torsdag 14³⁰.
2. Husk å melde deg på programseminar!
3. Html-versjon av kompendiet skal nå fange. Med quizzes for hvert kapittel, samt interaktiv kode.
Skal bruke quizzene de neste ukene, når dere er ferdige med komplekse tall i MATLAB, og hatt om arrays i IN1900.

Vanskelige ting fra kap.1/2:

Projeksjon av $\vec{a}$ ned på linjen gjennom $\vec{0}$ og $\vec{b}$:

$$\text{proj}_{\vec{b}} \vec{a} = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{b}|^2} \vec{b}$$

(nærmeste punkt til $\vec{a}$ på linjen)

Projeksjonsmatrisen A til den lineære avbildningen

$$\vec{a} \rightarrow \text{proj}_{\vec{b}} \vec{a}$$

oppfyller $A\vec{x} = \text{proj}_{\vec{b}} \vec{x}$ for alle $\vec{x}$.

Resultat fra boka:

$$A = \begin{pmatrix} \text{proj}_{\vec{b}} \vec{e}_1 & \text{proj}_{\vec{b}} \vec{e}_2 & \dots & \text{proj}_{\vec{b}} \vec{e}_n \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{\vec{e}_1 \cdot \vec{b}}{|\vec{b}|^2} \vec{b} & \frac{\vec{e}_2 \cdot \vec{b}}{|\vec{b}|^2} \vec{b} & \dots & \frac{\vec{e}_n \cdot \vec{b}}{|\vec{b}|^2} \vec{b} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{b_1}{|\vec{b}|^2} \vec{b} & \frac{b_2}{|\vec{b}|^2} \vec{b} & \dots & \frac{b_n}{|\vec{b}|^2} \vec{b} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{b_1}{|\vec{b}|} \frac{\vec{b}}{|\vec{b}|} & \frac{b_2}{|\vec{b}|} \frac{\vec{b}}{|\vec{b}|} & \dots & \frac{b_n}{|\vec{b}|} \frac{\vec{b}}{|\vec{b}|} \end{pmatrix}$$

$$= \frac{\vec{b}}{|\vec{b}|} \begin{pmatrix} \frac{b_1}{|\vec{b}|} & \frac{b_2}{|\vec{b}|} & \dots & \frac{b_n}{|\vec{b}|} \end{pmatrix} = \frac{\vec{b}}{|\vec{b}|} \left(\frac{\vec{b}}{|\vec{b}|} \right)^T$$

Lynkurs i matematikkens grunnlag (referanse[2])

Teorem: En matematisk påstand med et tilhørende bevis kommer i flere kategorier: Lemma: Brukes til å vise andre teoremer.

Proposisjon: Et ikke fullt så viktig teorem.

Korollar: Et teorem som følger fra et annet teorem.

Definisjon: Introduserer nye begreper

Mengder er samlinger av matematiske objekter:

Vektorer / matriser / tall / funksjoner / andre mengder.

Objektene i mengden kalles elementer

La A være en mengde og x et objekt. Vi skriver

$x \in A$ hvis x er et element i mengden A

$x \notin A$ hvis x ikke er et element i mengden A .

Vi har alltid enten $x \in A$ eller $x \notin A$ (aldri begge deler).

Mengder skrives ofte på listeform:

$$A = \{10, 11, 12\}$$

$$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\} \quad \mathbb{N}_0 = \{0, 1, 2, 3, \dots\}$$

$$\mathbb{Z} = \{\dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots\}$$

$\mathbb{R}$ = mengden av reelle tall.

$\mathbb{C}$ = mengden av komplekse tall.

$\emptyset = \{ \}$, den tomme mengde

Mengder kan beskrives med mengdebyggenotasjon :

$$A = \{ (\text{uttrykk}) : (\text{betingelse}) \}$$

er mengden av alle uttrykk som oppfyller den gitte betingelsen:

$$A = \{ (x \in \mathbb{R}) : x \geq 0 \} \quad (\text{også skrives } \mathbb{R}^+)$$

$$\mathbb{Q} = \left\{ \frac{p}{q} : p, q \in \mathbb{Z}, q \neq 0 \right\} \quad (\text{rasjonale tall})$$

$$\{ 2k+1 : k \in \mathbb{N}_0 \} \quad (\text{oddetall})$$

$$[a, b] : \{ x \in \mathbb{R} : x \geq a, x \leq b \} \quad (\text{lukket intervall})$$

$$(a, b) : \{ x \in \mathbb{R} : x > a, x < b \} \quad (\text{åpent intervall})$$

$$[a, b) : \{ x \in \mathbb{R} : x \geq a, x < b \} \quad (\text{halvåpent intervall})$$

$$[a, \infty) : \{ x \in \mathbb{R} : x \geq a \}$$

Mengder har ingen rekkefølge på elementene :

$$\{ 1, 2, 3 \} = \{ 2, 3, 1 \}$$

To mengder er like hvis de inneholder de samme elementene:

Vi skriver da at $A = B$

En mengde kan ikke inneholde "duplikater" (flere av samme objekt):

$$\{1, 3, 3, 4\} \rightarrow \{1, 3, 4\}$$

Vi sier at A er en delmengde av B hvis alle elementer i A også er i B . Vi skriver da $A \subseteq B$

$$B \subseteq A$$

At $A = B$ er det samme som at $A \subseteq B$ og $A \supseteq B$

Eksempler: $\{1, 4, 5\} \subseteq \{1, 4, 5, 8, 9\}$

$$\mathbb{N} \subseteq \mathbb{Z}$$

$$\mathbb{Z} \subseteq \mathbb{Q}$$

$$\mathbb{Q} \subseteq \mathbb{R}$$

$$\subseteq$$

Vi sier at A er en ekte delmengde av B , $A \subsetneq B$, hvis

$$A \subseteq B, \text{ og } A \neq B$$

Spesielt er $[a, b] \subsetneq \mathbb{R}$

Antall elementer i A kalles kardinaliteten til A .

Vi skriver $\#A$ for denne.

$$\#\{5, 8, 10, 12\} = 4 \quad \#\emptyset = 0.$$

Hvis A og B er mengder definerer vi

$$A \cap B = \{x \in A : x \in B\} \quad (\text{snitt})$$

$$A \cup B = \{x : x \in A \text{ eller } x \in B\} \quad (\text{union})$$

$$A \setminus B = \{x \in A : x \notin B\} \quad (\text{differens})$$

$$\underbrace{A^c}_{\text{komplement}} = \{x : x \notin A\} \quad (\text{komplement})$$

må tolkes ut fra sammenhengen hvilke objekter som skal ligge i A .

Hvis U er dette universet så er $A^c = U \setminus A$.

De Morgans lover sier at

$$(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$$

$$(A \cap B)^c = A^c \cup B^c$$

Beris for at $(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$:

1. Anta $x \in (A \cup B)^c$

Da er $x \notin A \cup B$

Da er $x \notin A, x \notin B$

Da er $x \in A^c, x \in B^c$

Da er $x \in A^c \cap B^c$

$$(A \cup B)^c \subseteq A^c \cap B^c$$

2. Anta $x \in A^c \cap B^c$

Da er $x \in A^c, x \in B^c$

Da er $x \notin A, x \notin B$

Da er $x \notin A \cup B$

Da er $x \in (A \cup B)^c$

$$A^c \cap B^c \subseteq (A \cup B)^c$$

$$(A \cup B)^c = A^c \cap B^c. \quad \blacksquare$$

Hvis x og y er objekter sier vi at (x, y) er et par med førstekomponent x og andrekomponent y .

Mer generelt: Om $x_1, \dots, x_n$ er objekter så er

$(x_1, x_2, \dots, x_n)$ et n -tupel

med førstekomponent x_1 , andrekomponent $x_2, \dots$

Tupler (i motsetning til mengder) er ordnet $(1, 5) \neq (5, 1)$,
og kan ha like komponenter $((1, 3, 3, 4) \neq (1, 3, 4))$

Vi sier at $(x_1, \dots, x_n)$ og $(y_1, \dots, y_n)$ er like dersom

$$x_1 = y_1, x_2 = y_2, \dots, x_n = y_n$$

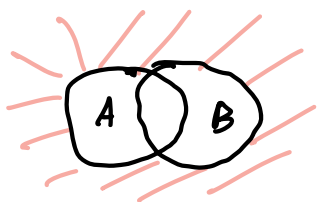
Hvis A og B er mengder så er det kartesiske produktet $A \times B$ definert ved

$$A \times B = \{ (x, y) : x \in A, y \in B \}$$

Hvis $A_1, \dots, A_n$ er mengder så definerer vi det kartesiske produktet

$$A_1 \times A_2 \times \dots \times A_n = \{ (x_1, x_2, \dots, x_n) : x_i \in A_i, i = 1, 2, \dots, n \}$$

Grafisk fremstilling



$$(A \cup B)^c$$



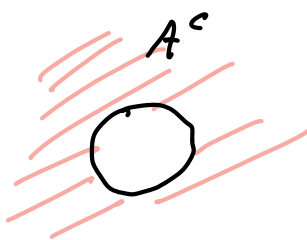
$$(A \cap B)^c$$



$$A \setminus B$$



$$B \setminus A$$



$$A \cap B$$



$$A \cup B$$

Oppgave 2.11 : Vis at $(A^c)^c = A$

1. $x \in (A^c)^c$. Da er $x \notin A^c$. Da er $x \in A$
2. $x \in A$. Da er $x \notin A^c$. Da er $x \in (A^c)^c$

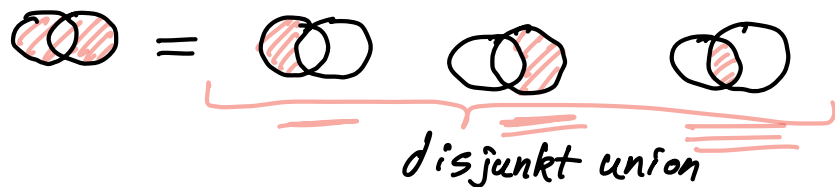
$$(A^c)^c \subseteq A$$

$$A \subseteq (A^c)^c$$

$$A = (A^c)^c$$

Oppgave: Anta A og B er endelige mengder.

$$\text{Vis at } \#(A \cup B) = \#A + \#B - \#(A \cap B)$$



$$\#(A \cup B) = \underbrace{\#A - \#(A \cap B)} + \underbrace{\#B - \#(A \cap B)} + \underbrace{\#(A \cap B)}$$

$$\#(A \cup B) = \#A + \#B - \#(A \cap B)$$

Merk: $A \subseteq B \Leftrightarrow A^c \supseteq B^c$

