

Forelesning 2/9

3. Funksjoner

En funksjon fra (mengde) A til (mengde) B :

En operasjon som til ethvert objekt i A tildeler ett (og bare ett) objekt i B . ← argument

$f: A \rightarrow B$ leses " f er en funksjon fra A til B "

$f: A \rightarrow B$ kalles veldefinert hvis den faktisk er en funksjon.

Eksempler: $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definert ved $f(x) = x^3$ er veldefinert.

$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definert ved $f(x) = \frac{1}{x^2}$ er ikke veldefinert
($x=0$ tildeles ingen verdi i $\mathbb{R}$).

$f: \overset{A}{\{0, 1, 2, 3, 4\}} \rightarrow \overset{B}{\{0, 1, 2, 3, 4\}}$ definert ved

$$f(0) = 4$$

$$f(1) = 3$$

$$f(2) = 2$$

$$f(3) = 1$$

$$f(4) = 0$$

er veldefinert.

$f: \{0, 1, 2, 3, 4\} \rightarrow \{0, 1, 2, 3, 4\}$ definert ved

$$f(0) = 4$$

$$f(4) = 0$$

er ikke veldefinert (1, 2, 3 tildeles ikke noe objekt)

$$f: \{0,1\} \rightarrow \{0,1\}$$

$$f(0)=0$$

$$f(0)=1$$

$$f(1)=1$$

er ikke veldefinert siden 0 tildeles to objekter.

A kalles definisjonsområdet / domenet til f

B kalles verdiområdet / kodomenet til f

D_f : definisjonsområdet A

V_f : verdimengde $\{f(x) : x \in A\}$

Noen funksjoner:

Om $A \subseteq B$ så er inklusionsfunksjonen, $i: A \rightarrow B$,
definert ved at $i(x) = x$ for alle $x \in A$.

Identitetsfunksjonen på en mengde A , $\text{id}: A \rightarrow A$,
er definert ved at $\text{id}(x) = x$ for alle $x \in A$.

(skrives også id_A for denne)

$\mapsto$: pil mot høyre brukes også til å representere
funksjoner:

$f(x) = x^3$ for $x \in \mathbb{R}$ kan også skrives $x \mapsto x^3$ for $x \in \mathbb{R}$.

$f: A \rightarrow B$ kalles injektiv (1 $\rightarrow$ 1, en-til-en) hvis,

for alle $x, y \in A$ som er slik at $f(x) = f(y)$,
så er $x = y$.

$x \mapsto x^2 \quad x \in \mathbb{R}$ er ikke injektiv ($1 \neq -1$, men $f(1) = f(-1)$).

$x \mapsto x^3 \quad x \in \mathbb{R}$ er injektiv.

$f: A \rightarrow B$ kalles surjektiv (på) hvis, for alle $y \in B$,

finnes en $x \in A$ slik at $f(x) = y$

(verdimengde = verdiområde)

(f treffer alle objekter i B).

$\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$
 $x \mapsto x^2: x \in \mathbb{R}$ er ikke surjektiv (ingen negative verdier)

$x \mapsto x^3: x \in \mathbb{R}$ er surjektiv.

$f: A \rightarrow B$ kalles bijektiv hvis den er både injektiv og surjektiv.

Samme som: For alle $y \in B$ finnes en $x \in A$, og bare en slik, slik at $f(x) = y$.

$\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^+$
 $x \mapsto x^2 \quad x \in \mathbb{R}$ er surjektiv, men ikke injektiv $\Rightarrow$ ikke bijektiv

$\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$
 $x \mapsto x^3 \quad x \in \mathbb{R}$ er surjektiv og injektiv $\Rightarrow$ bijektiv.

Eksempel: Sett $A = [-2, 2]$, $B = [-8, 8]$, så er

$x \mapsto x^2 \quad x \in A$ ikke injektiv

$x \mapsto x^3 \quad x \in A$ bijektiv (surjektiv fordi $f(-2) = -8$
 $f(2) = 8$).

Hvis $f: A \rightarrow B$, $g: B \rightarrow C$, så er komposisjonen av f og g , skrevet $g \circ f$, funksjonen fra A til C definert ved

$$g \circ f(x) = g(f(x)), \quad x \in A$$

$f: A \rightarrow B$ kalles inverterbar dersom det finnes en funksjon $g: B \rightarrow A$ slik at

$$f(g(y)) = y \text{ for alle } y \in B \quad (f \circ g = \text{id}_B)$$

$$g(f(x)) = x \text{ for alle } x \in A \quad (g \circ f = \text{id}_A)$$

g kalles da inversfunksjonen til f , eller bare inversen til f .

Vi skriver også f^{-1} for inversen til f .

Lemma Om f er inverterbar så har den kun en invers

Beweis: Hvis både g og h er inverser til f , så er, for alle $y \in B$:

$$\begin{array}{l} h \text{ invers til } f \qquad g \text{ invers til } f, g \circ f = \text{id}_A \\ g(y) \stackrel{\downarrow}{=} g(f(h(y))) = \text{id}_A(h(y)) = h(y). \end{array}$$

Derfor er $g=h$, slik at en invers er unik. ■

Eksempel: Finn inversfunksjonen til $f(x) = 4x - 3 \quad (x \in \mathbb{R})$

$$y = 4x - 3$$

$$y + 3 = 4x$$

$$x = \frac{1}{4}y + \frac{3}{4} = g(y), \quad y \in \mathbb{R}$$

Eksempel 3.4 Er $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ definert ved $f(x) = \begin{cases} 1 & x \text{ partall} \\ 2 & x \text{ oddetall} \\ 3 & x \text{ primtall} \end{cases}$
veldefinert?

Løsning: Nei, siden

2 er både primtall og partall

$\Downarrow$

$$f(2) = 1, \text{ og } f(2) = 3$$

3 er både primtall og oddetall

$\Downarrow$

$$f(3) = 2, \text{ og } f(3) = 3$$

så 2 og 3 tildeles flere objekter $\Rightarrow$ ikke veldefinert