

Forelesning 9/9

4. Utsagnslogikk

Et utsagn: En setning som enten er sann eller usann.

(har ingenting å si om du selv vet om den er sann eller usann)

Eksempler:

$$3 + 2 = 5$$

$$1 + 1 = 3$$

Det finnes uendelig mange tall

Jeg liker heavy metal.

setninger som ikke er utsagn :

$3 + 2$ (kan ikke si om er sann/usann)

$2n + 1 = 7$ (sannhet avhenger av n)

Et predikat: En setning som avhenger av en eller flere variable.

For hvert valg av disse har vi et utsagn.

utsagn

$$P: 3 + 2 = 6$$

predikat

$$Q(n): 2n + 1 = 7 \text{ for } n \in \mathbb{N}$$

$Q(3)$ sann, $Q(4)$ usann.

Konnektiver: En operasjon på/mellom utsagn. Disse er:

$\neg$ negasjon

$\wedge$ og

$\vee$ eller

$\Rightarrow$ impliserer

$\Leftarrow$ følger fra / implisert av

$\Leftrightarrow$ ekvivalent med

Negasjon: Hvis P er et utsagn så er $\neg P$ utsagnet "ikke P "
($\neg P$ er sann hvis/bare hvis P usann)

P	$\neg P$
S	U
U	S

"Hvis P er sann så er $\neg P$ usann"

"Hvis P er usann så er $\neg P$ sann"

P	$\neg P$	$\neg \neg P$
S	U	S
U	S	U

like, slik at $\neg \neg P = P$.

Og: Hvis P og Q er utsagn: $P \wedge Q$ ("P og Q") er utsagnet som er sant hvis og bare hvis både P og Q er sanne

P	Q	$P \wedge Q$
S	S	S
U	S	U
S	U	U
U	U	U

"Hvis P er sann og Q usann, så er $P \wedge Q$ usann."

Eller: $P \vee Q$ ("P eller Q") er utsagnet som er sant hvis og bare hvis minst en av P og Q er sanne.

P	Q	$P \vee Q$
S	S	S
U	S	S
S	U	S
U	U	U

"Hvis P er sann og Q usann, så er $P \vee Q$ sann"

Impliserer: Vi sier at $P \Rightarrow Q$ ("P impliserer Q")

dersom Q alltid er sann når P er sann.

"Jeg har en hundrelapp $\Rightarrow$ jeg har råd til en is".

$\Leftarrow$: "implisert av" : $P \Rightarrow Q$ og $Q \Leftarrow P$ betyr det samme

$P \Rightarrow Q$ og $P \Leftarrow Q$ er ikke det samme!

Når er $P \Rightarrow Q$ usann? Kun når P er sann og Q usann

Sannhetstabell:

P	Q	$P \Rightarrow Q$
S	S	S
U	S	S
S	U	U
U	U	S

Ekvivalent med

$$P \Leftrightarrow Q \quad ("P \text{ ekvivalent med } Q")$$

("P og Q betyr det samme")

Samme som $P \Rightarrow Q$ og $P \Leftarrow Q$

P	Q	$P \Leftrightarrow Q$	$P \Rightarrow Q$	$Q \Rightarrow P$	$(P \Rightarrow Q) \wedge (P \Leftarrow Q)$
S	S	S	S	S	S
U	S	U	S	U	U
S	U	U	U	S	U
U	U	S	S	S	S

Like!

De Morgans lover for utsagn P og Q:

$$\neg(P \wedge Q) = \neg P \vee \neg Q$$

$$\neg(P \vee Q) = \neg P \wedge \neg Q$$

Sammenheng De Morgan for mengder:

$$P \leftrightarrow A$$

$$Q \leftrightarrow B$$

$$\neg \leftrightarrow \text{komplement}$$

$$\wedge \leftrightarrow \cap$$

$$\vee \leftrightarrow \cup$$

$$(A \cap B)^c = A^c \cup B^c$$

Bevis De Morgans lover ved sannhetstabell

P	Q	$P \wedge Q$	$\neg(P \wedge Q)$	$\neg P$	$\neg Q$	$\neg P \vee \neg Q$
S	S	S	V	V	V	V
V	S	V	S	S	V	S
S	V	V	S	V	S	S
V	V	V	S	S	S	S

Like!

Eksempel: Forenkle utsagnet ved hjelp av De Morgans lover:
P: "Jeg liker enten fotball eller friidrett, ^{men} ^{minst} ^{en} ^{av dem},
men ikke svømming"

Løsning: La $Q(x)$ være predikatet "jeg liker x". Da er:

$$P \Leftrightarrow (Q(\text{fotball}) \vee Q(\text{friidrett})) \wedge \neg Q(\text{svømming})$$

$\neg P$ er det samme som

$$\begin{aligned} & \neg \left((Q(\text{fotball}) \vee Q(\text{friidrett})) \wedge \neg Q(\text{svømming}) \right) \\ &= (\neg Q(\text{fotball}) \wedge \neg Q(\text{friidrett})) \vee \neg \neg Q(\text{svømming}) \\ &= (\neg Q(\text{fotball}) \wedge \neg Q(\text{friidrett})) \vee Q(\text{svømming}) \\ & \quad \text{jeg liker hverken fotball eller friidrett} \quad \text{jeg liker svømming} \end{aligned}$$

Enten så liker jeg svømming, eller så liker jeg hverken fotball eller friidrett. (begge deler kan gjelde.)

Oppgave 4.11

De Morgans lov:

$$\neg \left(\underbrace{(\neg P \vee Q)}_{\text{utsagn 1}} \wedge \underbrace{(\neg Q \vee R)}_{\text{utsagn 2}} \right) = \left(\neg(\neg P \vee Q) \right) \vee \left(\neg(\neg Q \vee R) \right)$$

De Morgans lov

$$= (\neg \neg P \wedge \neg Q) \vee (\neg \neg Q \wedge \neg R)$$

$$= \underbrace{(P \wedge \neg Q)}_{P \text{ sann, } Q \text{ usann}} \vee \underbrace{(Q \wedge \neg R)}_{Q \text{ sann, } R \text{ usann}}$$

Utsagnet er sant $\Leftrightarrow$ enten P sann, Q usann,
eller Q sann, R usann.