

# Forelesning 14/9

## Oppgave 4.6

| P | Q | R | $P \wedge Q$ | $(P \wedge Q) \vee R$ | $Q \vee R$ | $P \wedge (Q \vee R)$ |
|---|---|---|--------------|-----------------------|------------|-----------------------|
| S | S | S | S            | S                     | S          | S                     |
| U | S | S | U            | S                     | S          | U                     |
| S | U | S | U            | S                     | S          | S                     |
| U | U | S | U            | S                     | S          | U                     |
| S | S | U | S            | S                     | S          | S                     |
| U | S | U | U            | U                     | S          | U                     |
| S | U | U | U            | U                     | U          | U                     |
| U | U | U | U            | U                     | U          | U                     |

forskjellige

Parentesene er altså viktige!

Eksempel der man kan droppe parentesene:

$$(P \wedge Q) \wedge R \Leftrightarrow P \wedge (Q \wedge R)$$

Eksempel på  $P \Rightarrow Q$  :  $\underbrace{x=3}_P \xRightarrow{\text{sann.}} \underbrace{x^2 - 6x + 9 = 0}_Q$

|   |   |                   |
|---|---|-------------------|
| P | Q | $P \Rightarrow Q$ |
| S | S | S                 |

Jeg bor i Norge  $\Rightarrow$  Jeg bor i Oslo  
P Q

Hvis bor i Drammen:

|   |   |                   |
|---|---|-------------------|
| P | Q | $P \Rightarrow Q$ |
| S | U | U                 |

Hvis bor i Oslo:

|   |   |                   |
|---|---|-------------------|
| P | Q | $P \Rightarrow Q$ |
| S | S | S                 |

Kvantorer: La  $P(n)$  være et predikat, som

$P(n)$ :  $n$  er et partall.

$P(2), P(4), P(6), \dots$  er da sanne

Vi vil finne en kompakt notasjon for alle disse:  
 $2, 4, 6, \dots$ , kan skrives  $2n$  for  $n \in \mathbb{N}$ .

Vi skriver:

$\forall n \in \mathbb{N}, P(2n)$

"For alle  $n \in \mathbb{N}$  er  $P(2n)$  sann

"For alle naturlige tall er  $2n$  et partall.

$\forall$  kalles en kvantor ("for alle")

$\exists$  er også en kvantor ("det eksisterer")

Eksempel:  $\exists n \in \mathbb{N}, P(n)$

"Det eksisterer et naturlig tall  $n$  slik at  $n$  er et partall".

$\neg$  er negasjonen av  $\exists$

$\exists n \in \mathbb{N}, P(n)$

"Det eksisterer ingen  $n$  slik at  $n$  er et partall.

$\exists n \in \mathbb{N}, P(n) \Leftrightarrow \forall n \in \mathbb{N}, \neg P(n)$   
"ikke partall".

### Kombinere kvantorer:

$P: \forall \text{ tall } x, \exists \text{ tall } y, y > x$

"For alle tall finnes et tall som er større"

Hvis vi bytter rekkefølge på kvantorene:

$\exists \text{ tall } y, \forall \text{ tall } x, y > x$

forskjellige

"Det finnes et tall  $y$  som er større enn ethvert annet tall"

Kan ikke bytte rekkefølge på kvantorer uten videre.

### Negasjon av kvantorer

Anta  $P(x)$  er et predikat.

$\forall x, P(x)$  : "For alle  $x$  er  $P(x)$  sann"

Negasjon: "Det finnes minst en  $x$  s.a.  $P(x)$  er usann"

$\neg (\forall x, P(x)) \Leftrightarrow \exists x, \neg P(x)$

$\exists x, P(x)$  : "Det finnes minst en  $x$  s.a.  $P(x)$  er sann"

Negasjon: "For alle  $x$  så er  $P(x)$  usann"

$\neg (\exists x, P(x)) \Leftrightarrow \forall x, \neg P(x)$

Så: Ved negasjonen av et utsagn med kvantorer:

1. Bytt om  $\exists$  og  $\forall$
2. Erstatt  $P(x)$  med sin negasjon

Eksempel:  $P: \forall \text{ tall } x, \exists \text{ tall } y, y > x$

"For alle tall finnes et tall som er større"

$\neg P: \exists \text{ tall } x, \forall \text{ tall } y, y \leq x$

"Det finnes et tall  $x$  s.a. for alle tall  $y$ , så er  $y \leq x$ "

"Det finnes et største tall".