

## Forelesning 15/9

### Eksempel fra boka:

$P: \forall \text{ hus } x, \exists \text{ person } y, y \text{ bor i } x$   
"Alle hus er bebodd"

$\neg P: \exists \text{ hus } x, \forall \text{ personer } y, y \text{ bor ikke i } x$   
"Finnes et ubebodd hus"

Eksempel: La  $x_1, x_2, x_3, \dots \in \mathbb{R}$ , vi lar  $n \rightarrow \infty$

La  $P: x_n \rightarrow x \text{ når } n \rightarrow \infty$   
" $x_n$  konvergerer mot  $x$  når  $n \rightarrow \infty$ ."

Vi har:  $P \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geq N, |x_n - x| < \varepsilon$

$\neg P \Leftrightarrow \exists \varepsilon > 0, \forall N \in \mathbb{N}, \exists n \geq N, |x_n - x| \geq \varepsilon$

"Det finnes en  $\varepsilon > 0$  s.o., uikårlig langt ute i følgen, finnes  $x_n$  s.o.  $|x_n - x| \geq \varepsilon$ "

"For all  $\varepsilon > 0$  vil  $|x_n - x| < \varepsilon$  for alle  $x_n$  uikårlig langt ute i følgen"

## Kap. 5 Bevissteknikk

### Tips for bevisføring:

(i): Les noen beviser, ta en pause, forsøk å rekonstruere dem.

(ii) se på fasit når står fast.

## Vanlige former for teoremer:

1. Utsagn  $P$  er sant
2. Hvis  $P$  er sann så er også  $Q$  sann ( $P \Rightarrow Q$ )
3. Hvis er slik at  $P(n)$  er sann, så er også  $Q(n)$  sann  
(betinget utsagn)

## Frengangsmåte:

1. Skriv antagelse og konklusjon tydelig.  
Definer alle begreper
2. Fyll inn logiske argumenter som tar deg fra antagelse til konklusjon.
3. Renskriv beviset, slik at det blir presist, uten overflørdige ting.

Eksempel: Vis at hvis  $n$  er delelig med 4, så er  $n$  et partall.

Antagelse:  $P(n) : n$  er delelig med 4

Konklusjon:  $Q(n) : n$  er et partall

Definisjon: La  $n, p \in \mathbb{N}$ . Vi sier at  $n$  er delelig med  $p$  dersom det finnes  $k \in \mathbb{N}$  s.a.  $n = kp$

Definisjon: Et partall er et tall som er delelig med 2

Antagelse: " $n$  er delelig med 4" :  $\exists k \in \mathbb{N}, n = 4k$

Konklusjon: " $n$  er delelig med 2" :  $\exists l \in \mathbb{N}, n = 2l$

argumenter:  $n = 4k = 2 \cdot 2k = 2l$  der  $l = 2k$

Derfor er  $n = 2l$  (der  $l \in \mathbb{N}$ ), så da er  $n$  delelig med 2,

så da er  $n$  et partall.

Formuler som teorem:

Teorem: Om  $n \in \mathbb{N}$  er delelig med 4, så er  $n$  et partall

Beris: Om  $n$  er delelig med 4 finnes  $k \in \mathbb{N}$  s.a.  $n = 4k$ .

La  $l = 2k$ . Da er  $n = 2l$ . Siden  $l \in \mathbb{N}$  så er  $n$  et partall ■

Generalisering:

Teorem: Om  $n \in \mathbb{N}$  er delelig med  $p$ , og  $p$  er delelig med  $q$ , så er også  $n$  delelig med  $q$

Over:  $p = 4$ ,  $q = 2$

Beris: Om  $n$  er delelig med  $p$ , så er  $n = kp$  for en  $k \in \mathbb{N}$ .

Om  $p$  er delelig med  $q$ , så er  $p = lq$  for en  $l \in \mathbb{N}$

men da er:  $n = pk = (lq)k = (kl)q$

Siden  $kl \in \mathbb{N}$  så er  $n$  delelig med  $q$  ■

Direkte beris: Starter med antagelse, utleder logiske konsekvenser, og ender med en konklusjon.

Teorem: La  $n \in \mathbb{N}$ . Om  $n$  er et oddetall, så er  $n^2$  også et oddetall.

Beris: Definisjon:  $n$  kalles et oddetall hvis det kan skrives  
 $n = 2m + 1$  der  $m \in \mathbb{N}_0$

Siden  $n$  er et oddetall skriver vi  $n = 2m + 1$ . Da er  
$$n^2 = (2m + 1)^2 = 4m^2 + 4m + 1 = 2(2m^2 + 2m) + 1$$

Siden  $2m^2 + 2m \in \mathbb{N}_0$  så er  $n^2 = 2k + 1$  for  $k \in \mathbb{N}_0$ ,  
slik at  $n^2$  er et oddetall. ■

**Teorem:** La  $f: A \rightarrow B$ .  $f$  er bijektiv hvis og bare hvis  
 $f$  er inverterbar

Bevis:  $\Rightarrow$  Anta  $f$  er bijektiv

Må vise: Finnes en funksjon  $g: B \rightarrow A$  s.a.

$$f(g(y)) = y \quad \forall y \in B, \quad g(f(x)) = x \quad \forall x \in A.$$

La  $y \in B$ : Det finnes da en unik  $x \in A$  s.a.  $f(x) = y$   
 $f$  bijektiv

Definer  $g(y) = x$  (der altså  $f(x) = y$ ).  $g$  er veldefinert på  $B$ .

Da er:  $f(g(y)) = f(x) = y$   
 $g(f(x)) = g(y) = x$  }  $f$  er inverterbar med invers  $g$ .

$\Leftarrow$ : Anta  $f$  er inverterbar. Må vise at  $f$  er bijektiv;  
dvs. både injektiv og surjektiv.

Vi vet: det finnes en  $g: B \rightarrow A$  s.a.  $f(g(y)) = y \quad \forall y \in B$   
 $g(f(x)) = x \quad \forall x \in A$

$f$  er injektiv: Anta  $f(x_1) = f(x_2)$  der  $x_1 \neq x_2$

Da er også

$$\begin{array}{ccc} g(f(x_1)) & = & g(f(x_2)) \\ \parallel & & \parallel \\ x_1 & = & x_2 \end{array}$$

Vi fikk  $x_1 = x_2$ , som strider mot at  $x_1 \neq x_2$ .  
Derfor er  $f$  injektiv.

$f$  er surjektiv: Anta  $y \in B$ . Da er  $f(g(y)) = y$ .

Sett  $x = g(y)$ . Da er  $f(x) = y \Rightarrow f$  surjektiv.  
Siden  $f$  er både injektiv og surjektiv, så er den  
også bijektiv. ■

### 5.3 Kontrapositivt bevis

Vi viser at  $P \Rightarrow Q$  og  $\neg Q \Rightarrow \neg P$  er ekvivalente  
ved hjelp av en sannhetstabell:

| $P$ | $Q$ | $P \Rightarrow Q$ | $\neg P$ | $\neg Q$ | $\neg Q \Rightarrow \neg P$ |
|-----|-----|-------------------|----------|----------|-----------------------------|
| S   | S   | S                 | V        | V        | S                           |
| V   | S   | S                 | S        | V        | S                           |
| S   | V   | V                 | V        | S        | V                           |
| V   | V   | S                 | S        | S        | S                           |

Like!

Sagt annerledes:  $P \Rightarrow Q$  betyr  $Q$  er sann når  $P$  er sann  
Så hvis  $Q$  er usann må  $P$  være usann:

$$\neg Q \Rightarrow \neg P$$

$\neg Q \Rightarrow \neg P$  betyr at  $\neg P$  er sann når  $\neg Q$  er sann  
 $P$  er usann når  $Q$  er usann  
så hvis:  $P$  er sann må  $Q$  være sann ( $P \Rightarrow Q$ )

Eksempel: Vis at hvis  $\underbrace{n^2 \text{ er et partall}}_P$ , så er også  $\underbrace{n \text{ partall}}_Q$

Vi skal vise:  $P \Rightarrow Q$

$\neg Q \Rightarrow \neg P$  sier  $\underbrace{n \text{ ikke partall}}_{\neg Q} \Rightarrow \underbrace{n^2 \text{ ikke partall}}_{\neg P}$

$n \text{ oddetall} \Rightarrow n^2 \text{ oddetall}$

Dette er allerede vist: Sett  $n = 2m + 1$  ■

Eksempel: La  $x, y \in \mathbb{N}$ . Vis at:

hvis  $\underbrace{xy \text{ ikke er delelig med } 2}_P$ , så er hverken  $x$  eller  $y$   $\underbrace{\text{delelig med } 2}_Q$

$\neg Q \Rightarrow \neg P$  sier

minst en av  $x, y$  delelig med 2  $\Rightarrow xy$  er delelig med 2

Anta  $x$  er delelig med 2. Da er  $x = 2k$ ,  $k \in \mathbb{N}$

Da er  $xy = 2ky$ . Siden  $ky \in \mathbb{N}$  så er  $xy$  også delelig med 2

Oppgave 5.6 a) Vis:

Hvis  $\underbrace{3n+5 \text{ er et oddetall}}_P$ , så er  $\underbrace{n \text{ et partall}}_Q$

$\neg P$ :  $3n+5$  er et partall

$\neg Q$ :  $n$  er et oddetall

Anta  $\neg Q$ : Da er  $n = 2m + 1$  for en  $m \in \mathbb{N}$ . Da er

$$3n + 5 = 3(2m + 1) + 5 = 6m + 8 = 2(3m + 4)$$

Siden  $3m+4 \in \mathbb{N}$  så er  $3n+5$  er partall, slik at

$$\neg Q \Rightarrow \neg P$$