

Forelesning 16/9

5.4 Motsigelsesbevis

Vi vil bevise utsagnet P

I et motsigelsesbevis: Antar $\neg P$, og viser at dette gir en selvmodsigelse. Derfor må P være sann.

Eksempel: P : $\sqrt{2}$ er et irrasjonalt tall.

$\neg P$: $\sqrt{2}$ kan skrives som $\frac{p}{q}$, $p, q \in \mathbb{N}$

Vi kan forkorte felles faktorer i p og q ,

Vi antar derfor at p og q ikke har felles faktorer.

$$\sqrt{2} = \frac{p}{q} \Rightarrow 2 = \frac{p^2}{q^2} \Rightarrow p^2 = 2q^2$$

$\Downarrow$
 p^2 partall

$\Downarrow$
 p partall: $p = 2k$, $k \in \mathbb{N}$

$$4k^2 = 2q^2$$

$\Downarrow$

$$2k^2 = q^2$$

$\Downarrow$
 q^2 partall

$\Downarrow$
 q partall

Siden q og p begge er partall, så har de 2 som felles faktor.

Dette gir en motsigelse, siden vi antok at p og q ikke hadde felles faktorer.

Eksempel: P : Det finnes uendelig mange primtall

$\neg P$: Det finnes endelig mange primtall.

Kall disse $x_1, x_2, \dots, x_k$

Tallet $x_1 x_2 \dots x_k + 1$ er ikke delelig med noen av $x_1, x_2, \dots, x_k$.

Da er ikke $x_1 x_2 \dots x_k + 1$ delelig med noe annet tall
 $\Rightarrow x_1 x_2 \dots x_k + 1$ er et primtall $\neq x_1, x_2, \dots, x_k$.

Siden $x_1 x_2 \dots x_k + 1 > x_k$, så er ikke x_k det største primtallet, som gir en motsigelse.

Motsigelsesbevis for betingede utsagn ($P \Rightarrow Q$)

Vi har vist at $\neg(P \Rightarrow Q) = P \wedge \neg Q$

Derfor: start med å anta at P er sann og Q usann, og utled en selvmotsigelse fra dette.

Eksempel: La $a, b \in \mathbb{R}$. Vis at $\underbrace{a \in \mathbb{Q}, ab \notin \mathbb{Q}}_P \Rightarrow \underbrace{b \notin \mathbb{Q}}_Q$

P sann, Q usann: $\underbrace{a \in \mathbb{Q}, ab \notin \mathbb{Q}}_{P \text{ sann}}, \underbrace{b \in \mathbb{Q}}_{Q \text{ sann}}$

$ab \in \mathbb{Q}$, motsigelse $\left(\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}\right)$

Det følger at $P \Rightarrow Q$, siden $\neg(P \Rightarrow Q)$ gir selvmotsigelse.

5.5 Induksjonsbevis

Viser påstander av typen $\forall n \in \mathbb{N}, P(n)$, der P er et predikat.
indeksmengde, kan også være
feks. $(3, 4, 5, \dots)$

Eksempel: Vis at $\sum_{k=1}^n k = \frac{n(n+1)}{2}$ for $n \in \mathbb{N}$

Vi viser $\forall n, P(n)$ ved å berise:

1, $P(1)$ (grunntilfellet)

2, $P(n) \Rightarrow P(n+1)$ for alle $n \in \mathbb{N}$

Da er $P(2), P(3), P(4), \dots$ osv.

Dermed er $P(n)$ sann for alle n .

(induksjonssteget)

Grunntilfellet: $P(1)$ sier $\sum_{k=1}^1 k = \frac{1(1+1)}{2}$, slik at $P(1)$ er sann.

$$\begin{array}{ccc} 1 & & 1 \\ || & & || \\ 1 & = & 1 \end{array}$$

Induksjonssteget: Antar at $P(n)$ er sann, dvs. $\sum_{k=1}^n k = \frac{n(n+1)}{2}$.

Skal vise at $P(n+1)$ er sann, dvs. $\sum_{k=1}^{n+1} k = \frac{(n+1)((n+1)+1)}{2}$

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{n+1} k &= \sum_{k=1}^n k + (n+1) \stackrel{P(n)}{=} \frac{n(n+1)}{2} + (n+1) = (n+1) \left(\frac{n}{2} + 1 \right) \\ &= \frac{(n+1)(n+2)}{2} \\ &= \frac{(n+1)((n+1)+1)}{2} \end{aligned}$$

VS

HS

Slik at $P(n+1)$ også er sann.

Dermed er $P(n)$ sann for alle n .

Eksempel: Vis at alle oddetall som også er kvadrattall kan skrives på formen $8k+1$ $(2n+1)^2$

Løsning: Vi setter $P(n) : \exists k \in \mathbb{N}_0 \quad (2n+1)^2 = 8k+1$

Grunntilfellet $P(0)$: $(2 \cdot 0 + 1)^2 = 1^2 = 1 = 8 \cdot 0 + 1$

Derfor er $P(0)$ sann (vi kan sette $k=0$)

Induksjonssteget: Vi antar at $P(n)$ sann: $(2n+1)^2 = 8k+1$, $k \in \mathbb{N}_0$.
Vi skal vise at $P(n+1)$ er sann, som sier at

$$(2(n+1)+1)^2 = 8r+1, \quad r \in \mathbb{N}_0:$$

$$\begin{aligned}(2(n+1)+1)^2 &= (\underline{2n+1} + \underline{2})^2 = (2n+1)^2 + 4(2n+1) + 4 \\ &\stackrel{P(n)}{=} 8k+1 + 8n+8 \\ &= 8(k+n+1)+1\end{aligned}$$

$$= 8r+1 \quad \text{med } r = k+n+1 \in \mathbb{N}_0$$

Siden $(2(n+1)+1)^2$ også er på formen $8r+1$,
Så er $P(n+1)$ sann, og da er $P(n)$ sann for alle n .

Eksempel: Vis at $1+3+\dots+(2n-1) = n^2$ for alle $n \in \mathbb{N}$

$$P(n): 1+3+\dots+(2n-1) = n^2$$

Granntilfellet $P(1)$: $1 = 1^2 = 1$,
slik at $P(1)$ er sann

Induksjonssteget: Anta at $P(n)$ er sann

$$P(n+1) \text{ sier at } \underbrace{1+3+\dots+(2n-1)}_{VS} = \underbrace{(n+1)^2}_{HS}$$

$$VS: (1+3+\dots+2n-1) + (2n+1) \stackrel{P(n)}{=} n^2 + 2n+1 = (n+1)^2$$

$$HS: (n+1)^2$$

Siden $VS = HS$ så er også $P(n+1)$ sann, slik at $P(n)$ er sann for alle n .

Eksempel: Anta $x \in \mathbb{R}$. Vis at $|\sin(nx)| \leq n|\sin x|$, $n \in \mathbb{N}_0$

$$\text{Vi setter } P(n): \underbrace{|\sin(nx)|}_{VS} \leq \underbrace{n|\sin x|}_{HS}$$

Grunntilfellet $n=0$: $\sin(0x) = \sin 0 = 0$. Da er $VS=HS=0$, slik at $P(0)$ er sann

Induksjonssteget: Anta at $P(n)$ er sann, der $n \geq 0$.

$$|\sin(nx)| \leq n|\sin x|$$

Vi skal vise at $P(n+1)$ er sann, dvs:

$$|\sin((n+1)x)| \leq (n+1)|\sin x|$$

$$\begin{aligned} \text{Vi får } |\sin((n+1)x)| &= |\sin(nx+x)| = |\sin nx \cos x + \cos nx \sin x| \\ &\stackrel{|\cos x| \leq 1}{\leq} |\sin nx| |\cos x| + |\cos nx| |\sin x| \\ &\leq |\sin nx| + |\sin x| \\ &\leq n|\sin x| + |\sin x| \\ &= (n+1)|\sin x| \end{aligned}$$

Derfor er $|\sin((n+1)x)| \leq (n+1)|\sin x|$, slik at $P(n+1)$ er sann, slik at $P(n)$ er sann for alle n .

Eksempel: Ethvert naturlig tall kan skrives som en sum av (forskjellige) toerpotenser ($\sum_i a_i 2^i$, der $a_i = 0$ eller 1)

$$P(n) : 1, \dots, 2^n - 1 \text{ kan alle skrives som } \sum_i a_i 2^i, a_i = 0 \text{ eller } 1$$

Grunntilfellet $P(1)$: $2^1 - 1 = 1 = 2^0$, som er en sum av toerpotenser.

Derfor er $P(1)$ sann.

Induksjonssteget Anta vi har vist $P(n)$.

Vi må vise : $P(n+1)$ er sann, dvs.

$$1, \dots, 2^{n+1} - 1 \text{ kan skrives p\aa formen } \sum a_i 2^i, a_i = 0, 1$$

Siden $P(n)$ er sann s\aa er det nok \aa vise at

$$\{2^n, 2^{n+1}, \dots, 2^{n+1} - 1\} \text{ kan skrives p\aa formen } \sum a_i 2^i$$

Hvis $k \in \{2^n, 2^n+1, \dots, 2^{n+1}-1\}$ så kan vi skrive

$$k = 2^n + r, \text{ der } 0 \leq r \leq 2^n - 1$$

kan skrives som sum av toerpotenser.

Men da kan r skrives som $\sum a_i 2^i$ på grunn av $P(n)$,

og da er $k = 2^n + r$ også en sum av toerpotenser.

Sterk induksjon: Her erstattes induksjonssteget $P(n) \Rightarrow P(n+1)$ med

$$P(1) \wedge P(2) \wedge \dots \wedge P(n) \Rightarrow P(n+1).$$