

UNIVERSITETET I OSLO

Det matematisk-naturvitenskapelige fakultet

Eksamen i: MAT1105 — Lineær algebra og numeriske metoder

Eksamensdag: Onsdag 4. desember 2024.

Tid for eksamen: 15:00 – 19:00.

Oppgavesettet er på 7 sider.

Vedlegg: Ingen.

Tillatte hjelpemidler: Ingen.

Kontroller at oppgavesettet er komplett før du begynner å besvare spørsmålene.

Settet består av 10 deloppgaver som alle teller 6 poeng. Du må begrunne alle svar, og du må vise nok mellomregninger til at man lett kan følge argumentene dine.

Oppgave 1 (6 poeng)

En kvadratisk matrise $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ er *nilpotent* om det finnes en $k \in \mathbb{N}$ slik at $A^k = 0$ (nullmatrisen). Skriv et motsigelsesbevis for følgende utsagn:

La A være en nilpotent matrise. Da er A ikke inverterbar.

Løsning:

Bevis. Anta motsatt at $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ er inverterbar, og la k være slik at $A^k = 0$. Da er

$$0 = (A^{-1})^k 0 = (A^{-1})^k A^k = \underbrace{A^{-1} \cdots A^{-1}}_{k \text{ ledd}} \underbrace{A \cdots A}_{k \text{ ledd}} = I_n,$$

en selvmotsigelse. Alternativt kan man si at $\det(A^k) = \det(A)^k$ gir en selvmotsigelse hvis A er inverterbar, siden venstre side er 0 for en k , og høyre side er $\neq 0$ for samme k . $\square$

(2 poeng for å ta utgangspunkt i at A er inverterbar. 4 poeng for å produsere en motsigelse når A er inverterbar)

Oppgave 2 (6 poeng)

Vi sier at to tall har *lik paritet* hvis enten begge er partall eller begge er oddetall. Skriv et kontrapositivt bevis for følgende utsagn:

La $x, y \in \mathbb{N}$. Om $x + y$ er et partall, har x og y lik paritet.

(Fortsettes på side 2.)

Løsning:

Bevis. Vi antar kontrapositivt at x og y ikke har lik paritet, og vil vise at $x + y$ er et oddetall. Anta at x er like og y odde — det motsatte tilfellet er helt analogt. Da er $x = 2k$ og $y = 2\ell - 1$ for $k, \ell \in \mathbb{N}$. Men da blir $x + y = 2(k + \ell) - 1$, et oddetall. $\square$

(2 poeng for å ta utgangspunkt i at x og y ikke har lik paritet. 4 poeng for å vise at $x + y$ da er et oddetall. -2 for “ $x = 2k, y = 2k - 1$ ”.)

Oppgave 3 (6 poeng)

Definer $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ ved $f(\mathbf{x}) = A\mathbf{x} + \mathbf{b}$, der

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & 0 & 5 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{og} \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Bestem om f er

- (i) veldefinert
- (ii) injektiv
- (iii) surjektiv
- (iv) inverterbar.

Løsning: f er både veldefinert, injektiv, surjektiv og inverterbar.

- (i) f er veldefinert fordi uttrykket $A\mathbf{x} + \mathbf{b}$ gir én, og bare én, verdi i $\mathbb{R}^3$ for hver $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3$.
- (ii) Vi viser først at A er inverterbar. Vi har

$$\det(A) = 1 \cdot (0 - 5) - 2 \cdot (3 - 10) + 0 = 9 \neq 0,$$

så A er inverterbar. Hvis $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^3$ er slik at $f(\mathbf{x}) = f(\mathbf{y})$, er $A\mathbf{x} = A\mathbf{y}$, så $A(\mathbf{x} - \mathbf{y}) = \mathbf{0}$, som kun har løsningen $\mathbf{x} - \mathbf{y} = A^{-1}\mathbf{0} = \mathbf{0}$, det vil si $\mathbf{x} = \mathbf{y}$.

- (iii) f er surjektiv. Om $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^3$ lar vi $\mathbf{x} = A^{-1}(\mathbf{y} - \mathbf{b})$; da er $f(\mathbf{x}) = \mathbf{y}$.
- (iv) Enhver funksjon som er både injektiv og surjektiv, er også inverterbar, så f er inverterbar.

(Halvannet poeng for hver av de 4 egenskapene.)

Oppgave 4 (12 poeng)

Vi ser på matrisen $A = \begin{pmatrix} 2 & 8 & 6 & 1 \\ -4 & -16 & -12 & 2 \\ -1 & -4 & -3 & 1 \end{pmatrix}$

(Fortsettes på side 3.)

4a

Finn en basis for søylerommet til A .

Løsning: Vi radreduserer

$$\begin{aligned}
 \begin{pmatrix} 2 & 8 & 6 & 1 \\ -4 & -16 & -12 & 2 \\ -1 & -4 & -3 & 1 \end{pmatrix} &\xrightarrow{I \leftrightarrow III} \begin{pmatrix} -1 & -4 & -3 & 1 \\ -4 & -16 & -12 & 2 \\ 2 & 8 & 6 & 1 \end{pmatrix} \\
 &\xrightarrow{I \cdot (-1)} \begin{pmatrix} 1 & 4 & 3 & -1 \\ -4 & -16 & -12 & 2 \\ 2 & 8 & 6 & 1 \end{pmatrix} \\
 &\xrightarrow{II+4I, III-2I} \begin{pmatrix} 1 & 4 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \\
 &\xrightarrow{II/(-2)} \begin{pmatrix} 1 & 4 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \\
 &\xrightarrow{III-3II, I+II} \begin{pmatrix} 1 & 4 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}
 \end{aligned}$$

Vi ser at søyle 1 og 4 i A er pivotsøyler, slik at disse utgjør en basis for søylerommet til A .

(3 poeng for riktig radredusering. 3 poeng for å konkludere med riktig basis. Å bare si at søyle 1 og 4 er en basis fortjener minst ett poeng trekk, siden mange tror at det er søylene i den radreduserte matrisen som utgjør basisen, ikke søylene i den opprinnelige matrisen.)

4b

Utvid basisen du fant i **a)** til en basis for $\mathbb{R}^3$.

Løsning: Vi setter inn en siste søyle som gjør at alle rader har et

pivotelement, og radreduserer baklengs:

$$\begin{aligned}
 & \begin{pmatrix} 1 & 4 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{III+3II, I-II} \begin{pmatrix} 1 & 4 & 3 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 1 \end{pmatrix} \\
 & \xrightarrow{II \cdot (-2)} \begin{pmatrix} 1 & 4 & 3 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 1 \end{pmatrix} \\
 & \xrightarrow{II-4I, III+2I} \begin{pmatrix} 1 & 4 & 3 & -1 & 0 \\ -4 & -16 & -12 & 2 & 0 \\ 2 & 8 & 6 & 1 & 1 \end{pmatrix} \\
 & \xrightarrow{I \cdot (-1)} \begin{pmatrix} -1 & -4 & -3 & 1 & 0 \\ -4 & -16 & -12 & 2 & 0 \\ 2 & 8 & 6 & 1 & 1 \end{pmatrix} \\
 & \xrightarrow{I \leftrightarrow III} \begin{pmatrix} 2 & 8 & 6 & 1 & 1 \\ -4 & -16 & -12 & 2 & 0 \\ -1 & -4 & -3 & 1 & 0 \end{pmatrix}
 \end{aligned}$$

Vi kan derfor utvide med vektoren $(1, 0, 0)$.

(3 poeng for å utvide den radreduserte matrisen til en matrise med 3 pivotsøyler. 3 poeng for å radredusere baklengs riktig. Maks 2 poeng i denne oppgaven ved feil i oppgave 4a som gjør dette veldig enkelt, f.eks. om svaret i 4a er $(1, 0, 0)$ (kandidat 15099).)

Oppgave 5 (12 poeng)

La A være matrisen $A = \begin{pmatrix} 0.7 & 0.8 \\ 0.3 & 0.2 \end{pmatrix}$.

5a

Finn egenverdiene og egenvektorene til A .

Løsning: Vi har at

$$\det(\lambda I - A) = (\lambda - 0.7)(\lambda - 0.2) - 0.24 = \lambda^2 - 0.9\lambda - 0.1.$$

Denne er 0 når $\lambda = \frac{0.9 \pm 1.1}{2}$. Derfor blir egenverdiene $\lambda_1 = -0.1$ og $\lambda_2 = 1$.

Egenvektor for $\lambda_1 = -0.1$:

$$-0.1I - A = \begin{pmatrix} -0.8 & -0.8 \\ -0.3 & -0.3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

En spesiell egenvektor blir $\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$

Egenvektor for $\lambda_2 = 1$:

$$I - A = \begin{pmatrix} 0.3 & -0.8 \\ -0.3 & 0.8 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -8/3 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

En spesiell egenvektor blir $\mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} 8 \\ 3 \end{pmatrix}$

(2 poeng for riktige egenverdier. 2 poeng for hver av egenvektorene.)

5b

Hva vil det si at en matrise kan diagonaliseres? Skriv ned en diagonalisering av matrisen A . Har A en ortonormal basis av egenvektorer?

Løsning: En matrise A er diagonaliserbar hvis den kan skrives på formen $A = PDP^{-1}$, der D er diagonal og P er inverterbar. P inneholder da egenvektorene som søyler, og D har egenverdiene på diagonalen.

Vi vet fra læreboka at egenvektorer tilhørende forskjellige egenverdier er lineært uavhengige. Siden vi her har to forskjellige egenverdier så har vi også to lineært uavhengige egenvektorer. Vi kan da få P ved å sette inn de to egenvektorene som søyler, med de tilhørende egenverdiene på diagonalen i D . Vi har derfor $A = PDP^{-1}$ med $P = \begin{pmatrix} -1 & 8 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$ og

$$D = \begin{pmatrix} -0.1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \text{ og}$$

$$P^{-1} = \frac{1}{\det(P)} \begin{pmatrix} 3 & -8 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} = \frac{1}{11} \begin{pmatrix} -3 & 8 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Det er raskt å sjekke at egenvektorene $(-1, 1)$ og $(8, 3)$ ikke er ortogonale, slik at vi ikke har en ortonormal basis av egenvektorer. Her kan man også argumentere som følger: Hvis A har en ortonormal basis av egenvektorer, så kan den skrives på formen $A = PDP^T$, der P har egenvektorene som søyler. Men da er A symmetrisk siden

$$A^T = (PDP^T)^T = PD^T P^T = PDP^T = A.$$

Matrisen her var ikke symmetrisk, og kan da heller ikke ha en ortonormal basis av egenvektorer.

(2 poeng for hvert av de tre delspørsmålene.)

Oppgave 6 (12 poeng)

En funksjon f tilfredsstiller $f(0) = 0$, $f(1) = -1$, $f(2) = 0$, og $f(3) = 9$.

6a

Finn tilnærmingen til $\int_0^3 f(x) dx$ som du får ved å bruke trapesmetoden med tre delintervaller.

(Fortsettes på side 6.)

Løsning: Vi får

$$\int_0^3 f(x) dx \approx 1 \cdot ((f(0) + f(3))/2 + f(1) + f(2)) = (9/2 - 1) = 7/2.$$

(2 poeng for riktig oppsett av trapesmetoden. 4 poeng for utregning. Ingen uttelling om de bruker formelen $h \sum_i f(x_i) - f(x_{i-1})$.)

6b

Finn newtonformen til det kubiske polynomet som interpolerer f i de gitte punktene. Hvilken tilnærming til $f'(1)$ kan du få fra det interpolerende polynomet?

Løsning: Newtonformen til polynomet er

$$p_3(x) = c_0 + c_1x + c_2x(x-1) + c_3x(x-1)(x-2)$$

for konstanter $c_0, c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{R}$. Vi får likningene

$$\begin{aligned} 0 &= c_0 \\ -1 &= c_0 + c_1 \\ 0 &= c_0 + 2c_1 + 2c_2 \\ 9 &= c_0 + 3c_1 + 6c_2 + 6c_3. \end{aligned}$$

De første to likningene gir $c_0 = 0$, $c_1 = -1$. Den tredje likningen gir $c_2 = 1$. Den fjerde gir $c_3 = \frac{9+3-6}{6} = 1$. Newtonformen blir dermed

$$p_3(x) = -x + x(x-1) + x(x-1)(x-2)$$

(som kan forenkles som $p_3(x) = x^3 - 2x^2$). Bruker vi $p'_3(1)$ som tilnærming til $f'(1)$ får vi

$$p'_3(1) = -1 + 1 - 1 = -1.$$

(2 poeng for å skrive opp ligninger for å finne newtonformen. 2 poeng for å løse disse riktig. 2 poeng for å derivere det interpolerende polynomet og evaluere dette i $a = 1$)

Oppgave 7 (6 poeng)

Vi bruker den symmetriske newtonkvotienten

$$f'(a) \approx (f(a+h) - f(a-h))/(2h)$$

som tilnærming til den deriverte til $f(x) = \cos x$ i a . Vis at feilen i denne tilnærmingen oppfyller

$$\left| \frac{f(a+h) - f(a-h)}{2h} - f'(a) \right| \leq \frac{h^2}{6}$$

Hvor liten må du velge h for at denne feilen skal bli mindre enn $6 \cdot 10^{-4}$?

Hint: Evaluer Taylorrekka til f i a av orden 2 med restledd i $a+h$ og $a-h$.

(Fortsettes på side 7.)

Løsning: Taylorrekkene i hintet er

$$\begin{aligned}f(a+h) &= f(a) + f'(a)h + \frac{f''(a)}{2}h^2 + \frac{f'''(c_1)}{6}h^3 \\f(a-h) &= f(a) - f'(a)h + \frac{f''(a)}{2}h^2 + \frac{f'''(c_2)}{6}h^3.\end{aligned}$$

der $c_1 \in [a, a+h]$, $c_2 \in [a-h, a]$. Trekkes disse fra hverandre, og vi deler med $2h$ på begge sider får vi

$$\frac{f(a+h) - f(a-h)}{2h} - f'(a) = \frac{f'''(c_1)}{12}h^2 + \frac{f'''(c_2)}{12}h^2.$$

Siden $|f'''(x)| \leq 1$ for alle x så har vi at

$$\left| \frac{f(a+h) - f(a-h)}{2h} - f'(a) \right| \leq \frac{h^2}{12} + \frac{h^2}{12} = \frac{h^2}{6}$$

Vi må derfor velge h slik at $h^2/6 \leq 6 \cdot 10^{-4}$, det vil si at $h^2 \leq 36 \cdot 10^{-4}$, det vil si at $h \leq 6 \cdot 10^{-2} = 0.06$.

(2 poeng for å sette opp taylorrekka til f i $a+h$ og $a-h$. 1 poeng for å kombinere disse til et uttrykk for trunkeringsfeilen. 2 poeng for begrensningen 1 på (de) deriverte, og på trunkeringsfeilen. 1 poeng for hvor liten du må velge h .)

Lykke til!