

UNIVERSITETET I OSLO

Det matematisk-naturvitenskapelige fakultet

Eksamen i: MAT1105 — Lineær algebra og numeriske metoder

Eksamensdag: Onsdag 10. desember 2025.

Tid for eksamen: 09:00 – 13:00.

Oppgavesettet er på 7 sider.

Vedlegg: Formelark.

Tillatte hjelpemidler: Ingen.

Kontroller at oppgavesettet er komplett før
du begynner å besvare spørsmålene.

Settet består av 10 deloppgaver som alle teller 6 poeng. Du må begrunne alle svar, og du må vise nok mellomregninger til at man lett kan følge argumentene dine.

Oppgave 1 (6 poeng)

La A være en reell $n \times n$ -matrise. Skriv et kontrapositivt bevis for følgende utsagn:

Hvis $(A\mathbf{x}) \cdot \mathbf{y} = \mathbf{x} \cdot (A\mathbf{y})$ for alle $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$, så er A symmetrisk

Løsning: Anta kontrapositivt at A ikke er symmetrisk. Da finnes det et par (i, j) slik at $a_{ij} \neq a_{ji}$. Setter vi $\mathbf{x} = \mathbf{e}_i$ og $\mathbf{y} = \mathbf{e}_j$ får vi

$$(A\mathbf{x}) \cdot \mathbf{y} = (A\mathbf{e}_i) \cdot \mathbf{e}_j = \mathbf{a}_i \cdot \mathbf{e}_j = a_{ji}$$

$$\mathbf{x} \cdot (A\mathbf{y}) = \mathbf{e}_i \cdot (A\mathbf{e}_j) = \mathbf{e}_i \cdot \mathbf{a}_j = a_{ij}$$

der $\mathbf{a}_i$ er søyle i i A , og der vi brukte at $A\mathbf{e}_i = \mathbf{a}_i$. Siden $a_{ij} \neq a_{ji}$ er $(A\mathbf{x}) \cdot \mathbf{y} \neq \mathbf{x} \cdot (A\mathbf{y})$ for dette valget av $\mathbf{x}$ og $\mathbf{y}$, slik at vi ikke har at $(A\mathbf{x}) \cdot \mathbf{y} = \mathbf{x} \cdot (A\mathbf{y})$ for alle $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$. Dermed er det kontrapositive beviset fullført.

Oppgave 2 (6 poeng)

En kvadratisk matrise $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ kalles *nilpotent* hvis det finnes en $k \in \mathbb{N}$ slik at $A^k = 0$ (nullmatrisen). Skriv et motsigelsesbevis for følgende utsagn:

En nilpotent matrise som er forskjellig fra nullmatrisen er ikke diagonaliserbar.

(Fortsettes på side 2.)

Løsning: Anta at A er nilpotent og forskjellig fra nullmatrisen, og anta for motsigelse at A er diagonaliserbar. Det finnes da en inverterbar matrise P og en diagonalmatrise D slik at $A = PDP^{-1}$. Siden A er nilpotent finnes en k slik at $A^k = 0$. Men vi har også at $A^k = (PDP^{-1})^k = PD^kP^{-1}$. Siden $0 = PD^kP^{-1}$ så må $D^k = 0$, og da må $D = 0$. Men da er $A = 0$, som er en motsigelse. Derfor kan ikke A være diagonaliserbar.

Oppgave 3 (6 poeng)

Definer $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^4$ ved $f(\mathbf{x}) = A\mathbf{x}$, der

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 4 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 2 \\ 2 & -2 & 4 \end{pmatrix}.$$

Bestem om f er

- (i) veldefinert
- (ii) injektiv
- (iii) surjektiv
- (iv) inverterbar.

Løsning: Vi radreduserer A :

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 4 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 2 \\ 2 & -2 & 4 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 0 & -5 & -1 \\ 0 & -7 & -6 \\ 0 & -6 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -6 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Siden siste rad ikke er en pivotrad så finnes det systemer $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ som ikke har løsning. f er derfor ikke surjektiv. Derfor er den heller ikke inverterbar. Siden alle søyler er pivotsøyler finnes det ingen frie variable, slik at alle systemer som har en løsning har en unik løsning. Derfor er f injektiv. Til slutt er det klart at f er veldefinert.

Oppgave 4 (12 poeng)

Vi ser på matrisen $A = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 4 & 14 \\ 1 & -1 & 7 & -1 \\ 3 & 3 & -3 & 15 \end{pmatrix}$

4a

Finn en basis for søylerommet til A .

(Fortsettes på side 3.)

Løsning: Vi radreduserer

$$\begin{aligned}
 \begin{pmatrix} 4 & 2 & 4 & 14 \\ 1 & -1 & 7 & -1 \\ 3 & 3 & -3 & 15 \end{pmatrix} &\stackrel{I \leftrightarrow II}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 7 & -1 \\ 4 & 2 & 4 & 14 \\ 3 & 3 & -3 & 15 \end{pmatrix} \\
 &\stackrel{II-4I}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 7 & -1 \\ 0 & 6 & -24 & 18 \\ 3 & 3 & -3 & 15 \end{pmatrix} \\
 &\stackrel{III-3I}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 7 & -1 \\ 0 & 6 & -24 & 18 \\ 0 & 6 & -24 & 18 \end{pmatrix} \\
 &\stackrel{III-II}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 7 & -1 \\ 0 & 6 & -24 & 18 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}
 \end{aligned}$$

Vi ser nå at søyle 1 og 2 i A er pivotsøylar (vi trenger ikke bringe matrisen på redusert trappeform for å se dette), slik at disse utgjør en basis for søylerommet til A .

4b

Utvid basisen du fant i **a)** til en basis for $\mathbb{R}^3$.

Løsning: Vi setter inn en siste søyle som gjør at alle rader har et pivotelement, og radreduserer baklengs:

$$\begin{aligned}
 \begin{pmatrix} 1 & -1 & 7 & -1 & 0 \\ 0 & 6 & -24 & 18 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} &\stackrel{III+II}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 7 & -1 & 0 \\ 0 & 6 & -24 & 18 & 0 \\ 0 & 6 & -24 & 18 & 1 \end{pmatrix} \\
 &\stackrel{III+3I}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 7 & -1 & 0 \\ 0 & 6 & -24 & 18 & 0 \\ 3 & 3 & -3 & 15 & 1 \end{pmatrix} \\
 &\stackrel{II+4I}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 7 & -1 & 0 \\ 4 & 2 & 4 & 14 & 0 \\ 3 & 3 & -3 & 15 & 1 \end{pmatrix} \\
 &\stackrel{I \leftrightarrow II}{\sim} \begin{pmatrix} 4 & 2 & 4 & 14 & 0 \\ 1 & -1 & 7 & -1 & 0 \\ 3 & 3 & -3 & 15 & 1 \end{pmatrix}
 \end{aligned}$$

Vi kan derfor utvide med vektoren $(0, 0, 1)$.

Oppgave 5 (12 poeng)

La A være matrisen $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -14 & 20 & -24 \\ -9 & 12 & -14 \end{pmatrix}$.

(Fortsettes på side 4.)

5a

Vis at $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ er en egenvektor for A . Finn de andre egenverdiene og egenvektorene til A .

Løsning: Vi har at

$$\begin{aligned} \det(A - \lambda I) &= \begin{vmatrix} 1 - \lambda & 0 & 0 \\ -14 & 20 - \lambda & -24 \\ -9 & 12 & -14 - \lambda \end{vmatrix} \\ &= (1 - \lambda) \begin{vmatrix} 20 - \lambda & -24 \\ 12 & -14 - \lambda \end{vmatrix} \\ &= (1 - \lambda)((20 - \lambda)(-14 - \lambda) + 288) \\ &= (1 - \lambda)(\lambda^2 - 6\lambda + 8) \end{aligned}$$

Denne er 0 når $\lambda = 1$, eller når $\lambda = \frac{6 \pm 2}{2}$. Derfor blir egenverdiene $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 2$, og $\lambda_3 = 4$.

Vi har at

$$A \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -14 & 20 & -24 \\ -9 & 12 & -14 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -14 + 40 - 24 \\ -9 + 24 - 14 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix},$$

slik at $(1, 2, 1)$ er en egenvektor for A , tilhørende egenverdi 1. Siden egenverdien 1 har multiplisitet 1, så har vi derfor funnet alle egenvektorer for $\lambda_1 = 1$.

Egenvektor for $\lambda_2 = 2$:

$$\begin{aligned} A - 2I &= \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ -14 & 18 & -24 \\ -9 & 12 & -16 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 18 & -24 \\ 0 & 12 & -16 \end{pmatrix} \\ &\sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & -4 \\ 0 & 3 & -4 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -4/3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Generell egenvektor blir $\mathbf{v}_2 = x_3 \begin{pmatrix} 0 \\ 4/3 \\ 1 \end{pmatrix}$. Setter vi $x_3 = 3$ får vi den

spesielle egenvektoren $(0, 4, 3)$.

Egenvektor for $\lambda_2 = 4$:

$$\begin{aligned} A - 4I &= \begin{pmatrix} -3 & 0 & 0 \\ -14 & 16 & -24 \\ -9 & 12 & -18 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 16 & -24 \\ 0 & 12 & -18 \end{pmatrix} \\ &\sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -3 \\ 0 & 2 & -3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -3/2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Generell egenvektor blir $\mathbf{v}_3 = x_3 \begin{pmatrix} 0 \\ 3/2 \\ 1 \end{pmatrix}$. Setter vi $x_3 = 2$ får vi den spesielle egenvektoren $(0, 3, 2)$.

5b

Vi minner om at en diagonalisering av en matrise er en faktorisering på formen PDP^{-1} , der D er diagonal, og P er inverterbar. Skriv ned en diagonalisering av matrisen A . Spesielt skal du finne matrisene P , D , og P^{-1} . Er A ortogonalt diagonaliserbar?

Løsning: Vi lar $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 4 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$ være matrisen med egenvektorene vi fant over som søyler. Vi radreduserer

$$\begin{aligned} (P \quad I_3) &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 4 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 3 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 2 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &\sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 12 & 9 & -6 & 3 & 0 \\ 0 & 12 & 8 & -4 & 0 & 4 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 12 & 9 & -6 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & -3 & 4 \end{pmatrix} \\ &\sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 12 & 9 & -6 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 3 & -4 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 12 & 0 & 12 & -24 & 36 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 3 & -4 \end{pmatrix} \\ &\sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & -2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 3 & -4 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Det følger at $P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 3 \\ -2 & 3 & -4 \end{pmatrix}$. Dermed får vi følgende diagonalisering av A :

$$A = PDP^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 4 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 3 \\ -2 & 3 & -4 \end{pmatrix}$$

Matrisen A er ikke symmetrisk, og den er derfor heller ikke ortogonalt diagonaliserbar. Dette kan man også se ved at egenvektorene vi fant ikke er ortogonale.

Oppgave 6 (18 poeng)**6a**

Finn tilnærmingen til $\int_0^{3/4} \sin(2\pi x) dx$ som du får ved å bruke midtpunktsmetoden med tre delintervaller.

(Fortsettes på side 6.)

Løsning: De tre delintervallene er $[0, 1/4]$, $[1/4, 1/2]$, $[1/2, 3/4]$, og midtpunktene i disse er $1/8$, $3/8$, $5/8$. Vi får

$$\begin{aligned}\int_0^{3/4} \sin(2\pi x) dx &\approx \frac{1}{4}(\sin(\pi/4) + \sin(3\pi/4) + \sin(5\pi/4)) \\ &= \frac{1}{4}(\sqrt{2}/2 + \sqrt{2}/2 - \sqrt{2}/2) = \sqrt{2}/8.\end{aligned}$$

6b

Finn newtonformen til det kubiske polynomet som interpolerer $\sin(2\pi x)$ i $x_0 = 0$, $x_1 = 1/4$, $x_2 = 1/2$, $x_3 = 3/4$. Hvilken tilnærming til $f''(1/4)$ kan du få fra det interpolerende polynomet?

Løsning: Newtonformen til polynomet er

$$p_3(x) = c_0 + c_1x + c_2x(x - 1/4) + c_3x(x - 1/4)(x - 1/2)$$

for konstanter $c_0, c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{R}$. Vi får likningene

$$\begin{aligned}0 &= c_0 \\ 1 &= c_0 + c_1 \frac{1}{4} \\ 0 &= c_0 + c_1 \frac{1}{2} + c_2 \frac{1}{8} \\ -1 &= c_0 + c_1 \frac{3}{4} + c_2 \frac{3}{8} + c_3 \frac{3}{32}.\end{aligned}$$

De første to likningene gir $c_0 = 0$, $c_1 = 4$. Den tredje likningen gir $0 = 2 + c_2/8$, som gir at $c_2 = -16$.

Den fjerde gir $c_3 = \frac{32}{3}(-1 - 3 + 6) = \frac{64}{3}$. Newtonformen blir dermed

$$p_3(x) = 4x - 16x(x - 1/4) + \frac{64}{3}x(x - 1/4)(x - 1/2)$$

Bruker vi produktregelen for derivasjon får vi så

$$\begin{aligned}p'_3(x) &= 4 - 16(x + (x - 1/4)) + \frac{64}{3}((x - 1/4)(x - 1/2) + x(x - 1/2) + x(x - 1/4)) \\ p''_3(x) &= -16(1 + 1) + \frac{64}{3} \cdot 2(x - 1/4 + x - 1/2 + x) \\ p''_3(1/4) &= -32 + \frac{64}{3} \cdot 2(-1/4 + 1/4) = -32,\end{aligned}$$

som er vår tilnærming til $f''(1/4)$.

6c

Vi bruker tilnærmingen

$$f''(a) \approx \frac{f(a+h) - 2f(a) + f(a-h)}{h^2}$$

(Fortsettes på side 7.)

til den andrederiverte til $f(x) = \sin(2\pi x)$ i $x = a$. Vis at feilen i denne tilnærmingen oppfyller

$$\left| \frac{f(a+h) - 2f(a) + f(a-h)}{h^2} - f''(a) \right| \leq \frac{4\pi^4 h^2}{3}.$$

Hvis du setter $a = h = 1/4$, hva blir tilnærmingen til $f''(a)$?

Hint: Evaluer Taylorrekka til f av orden 3 om a , med restledd, i punktene $a + h$ og $a - h$.

Løsning: Taylorrekken i hintet er

$$\begin{aligned} f(a+h) &= f(a) + f'(a)h + \frac{f''(a)}{2}h^2 + \frac{f'''(a)}{6}h^3 + \frac{f^{(4)}(c_1)}{24}h^4 \\ f(a-h) &= f(a) - f'(a)h + \frac{f''(a)}{2}h^2 - \frac{f'''(a)}{6}h^3 + \frac{f^{(4)}(c_2)}{24}h^4 \end{aligned}$$

der $c_1 \in [a, a+h]$, $c_2 \in [a-h, a]$. Legges disse sammen, og vi deler med h^2 på begge sider får vi

$$\frac{f(a+h) - 2f(a) + f(a-h)}{h^2} - f''(a) = \frac{f^{(4)}(c_1)}{24}h^2 + \frac{f^{(4)}(c_2)}{24}h^2.$$

Siden $|f^{(4)}(x)| \leq 16\pi^4$ for alle x så har vi at

$$\left| \frac{f(a+h) - 2f(a) + f(a-h)}{h^2} - f''(a) \right| \leq 16\pi^4 \frac{h^2}{24} + 16\pi^4 \frac{h^2}{24} = \frac{4\pi^4 h^2}{3}$$

Med $a = h = 1/4$ blir tilnærmingen til $f''(a)$ lik

$$(f(0) - 2f(1/4) + f(1/2))/(1/4)^2 = 16(0 - 2 + 0) = -32.$$

Det er ikke helt opplagt at vi skulle få samme verdi som i **b**, siden interpolasjonspolynomet der tar utgangspunkt i punktene $f(a-h)$, $f(a)$, $f(a+h)$, $f(a+2h)$. Utleder man punktmetoden for den andrederiverte basert på disse punktene vil man faktisk få $\frac{f(a+h)-2f(a)+f(a-h)}{h^2}$, det vil si at $f(a+2h)$ ikke bidrar. **b** svarer altså til punktmetoden vi brukte i **c**, slik at vi får samme resultat.

Lykke til!