

UNIVERSITETET I OSLO

Det matematisk-naturvitenskapelige fakultet

Eksamen i: MAT1105 — Lineær algebra og numeriske metoder

Eksamensdag: Prøveeksamen

Tid for eksamen: 15:00 – 19:00.

Oppgavesettet er på 6 sider.

Vedlegg: Ingen.

Tillatte hjelpemidler: Ingen.

Kontroller at oppgavesettet er komplett før
du begynner å besvare spørsmålene.

Settet består av 10 deloppgaver som alle teller 6 poeng. Du må begrunne alle svar, og du må vise nok mellomregninger til at man lett kan følge argumentene dine.

Lykke til!

Oppgave 1 (6 poeng)

La A være en $n \times n$ -matrise. Skriv et kontrapositivt bevis for følgende utsagn:

Hvis $\mathbf{x}^T A \mathbf{y} = 0$ for alle $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$ så er $A = 0$.

Løsning: Vi antar kontrapositivt at $A \neq 0$. Da finnes det en vektor $\mathbf{y}$ slik at $A \mathbf{y} \neq \mathbf{0}$ (Hvis søyle i i A inneholder en ikke-null, så kan du la $\mathbf{y} = \mathbf{e}_i$ for eksempel). Setter vi $\mathbf{x} = A \mathbf{y}$ får vi $\mathbf{x}^T A \mathbf{y} = (A \mathbf{y})^T A \mathbf{y} = |A \mathbf{y}|^2 \neq 0$. Dette viser at vi ikke har at $\mathbf{x}^T A \mathbf{y} = 0$ for alle $\mathbf{x}$ og $\mathbf{y}$, og beviset er fullført

Oppgave 2 (6 poeng)

En kvadratisk matrise $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ kalles *nilpotent* hvis det finnes en $k \in \mathbb{N}$ slik at $A^k = 0$ (nullmatrisen). Skriv et motsigelsesbevis for følgende utsagn:

En nilpotent matrise som er forskjellig fra nullmatrisen har kun egenverdien 0.

Løsning:

Bevis. Anta at A er nilpotent og forskjellig fra nullmatrisen, og anta for motsigelse at A har en egenverdi $\lambda \neq 0$. La $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$ være en tilhørende egenvektor. Siden A er nilpotent finnes en k slik at $A^k = 0$, men da er

(Fortsettes på side 2.)

også $A^k \mathbf{x} = \mathbf{0}$. Men vi har også at

$$A^k \mathbf{x} = \lambda A^{k-1} \mathbf{x} = \cdots = \lambda^k \mathbf{x} \neq \mathbf{0}.$$

Dette gir en motsigelse. Derfor må 0 være eneste egenverdi for A . $\square$

Oppgave 3 (6 poeng)

Definer $f: \mathbb{R}^5 \rightarrow \mathbb{R}^3$ ved $f(\mathbf{x}) = A\mathbf{x}$, der

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 6 & 1 & 4 \\ 1 & -3 & 1 & 2 & 1 \\ 4 & 1 & 4 & -1 & -2 \end{pmatrix}.$$

Bestem om f er

- (i) veldefinert
- (ii) injektiv
- (iii) surjektiv
- (iv) inverterbar.

Løsning: Vi radreduserer A :

$$\begin{pmatrix} 2 & -2 & 6 & 1 & 4 \\ 1 & -3 & 1 & 2 & 1 \\ 4 & 1 & 4 & -1 & -2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -3 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 4 & 4 & -3 & 2 \\ 0 & 13 & 0 & -9 & -6 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -3 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -3/4 & 1/2 \\ 0 & 0 & -13 & 3/4 & -25/2 \end{pmatrix}$$

Fra dette er det klart at alle radene i A er pivotrader. Dermed har $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ en løsning for alle $\mathbf{b}$, slik at f er surjektiv. Siden A har to frie variable (svarende til de to siste søylene) så har $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ alltid uendelig mange løsninger, slik at f ikke er injektiv, og derfor heller ikke inverterbar. Det er også klart at f er veldefinert.

Oppgave 4 (12 poeng)

Vi ser på matrisen $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 8 \\ 3 & -2 & 8 \\ 1 & 1 & 6 \\ -2 & -3 & -14 \end{pmatrix}.$

4a

Finn en basis for søylerommet til A .

(Fortsettes på side 3.)

Løsning: Vi radreduserer

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 8 \\ 3 & -2 & 8 \\ 1 & 1 & 6 \\ -2 & -3 & -14 \end{pmatrix} \xrightarrow{I \leftrightarrow III} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 6 \\ 3 & -2 & 8 \\ 2 & 0 & 8 \\ -2 & -3 & -14 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{II-3I, III-2I, IV+2I} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 6 \\ 0 & -5 & -10 \\ 0 & -2 & -4 \\ 0 & -1 & -2 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{II/(-5)} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 6 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & -2 & -4 \\ 0 & -1 & -2 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{III+2II, IV+II} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 6 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Det følger at søyle 1 og 2 er pivotsøylar, slik at de to første søylene i A er en basis for søylerommet til A .

4b

Utvid basisen du fant i **a)** til en basis for $\mathbb{R}^4$.

Løsning: Vi setter inn to ekstra søylar som gjør at alle rader har et pivotelement, og radreduserer baklengs:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 6 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{III-2II, IV-II} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 6 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & -4 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{II \cdot (-5)} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 6 & 0 & 0 \\ 0 & -5 & -10 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & -4 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{II+3I, III+2I, IV-2I} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 6 & 0 & 0 \\ 3 & -2 & 8 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 8 & 1 & 0 \\ -2 & -3 & -14 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{I \leftrightarrow III} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 8 & 1 & 0 \\ 3 & -2 & 8 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 6 & 0 & 0 \\ -2 & -3 & -14 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Vi kan derfor utvide til en basis for $\mathbb{R}^4$ ved å legge til vektorene $(1, 0, 0, 0)$ og $(0, 0, 0, 1)$.

(Fortsettes på side 4.)

Oppgave 5 (12 poeng)

La A være matrisen $\begin{pmatrix} 0.9 & 0.1 \\ 0.3 & 0.7 \end{pmatrix}$.

5a

Finn egenverdiene og egenvektorene til A .

Løsning: Vi har at

$$\det(A - \lambda I_2) = \begin{vmatrix} 0.9 - \lambda & 0.1 \\ 0.3 & 0.7 - \lambda \end{vmatrix} = (0.9 - \lambda)(0.7 - \lambda) - 0.03 = \lambda^2 - 1.6\lambda + 0.6,$$

og dette er 0 når $\lambda = \frac{1.6 \pm \sqrt{2.56 - 2.4}}{2} = 0.8 \pm 0.2$. Egenverdiene er derfor $\lambda_1 = 0.6$ og $\lambda_2 = 1$.

Egenvektorer for $\lambda_1 = 0.6$:

$$A - 0.6I_2 = \begin{pmatrix} 0.3 & 0.1 \\ 0.3 & 0.1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1/3 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Første rad sier her at $x_1 + x_2/3 = 0$, slik at $x_1 = -x_2/3$. En generell egenvektor blir derfor $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = x_2 \begin{pmatrix} -1/3 \\ 1 \end{pmatrix}$. Den spesielle egenvektoren $(-1, 3)$ får vi ved å sette $x_2 = 3$.

Egenvektorer for $\lambda_2 = 1$:

$$A - I_2 = \begin{pmatrix} -0.1 & 0.1 \\ 0.3 & -0.3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Første rad sier her at $x_1 - x_2 = 0$, slik at $x_1 = x_2$. En generell egenvektor blir derfor $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = x_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. Den spesielle egenvektoren $(1, 1)$ får vi ved å sette $x_2 = 1$.

5b

Vi setter $\mathbf{v} = \begin{pmatrix} -6 \\ 10 \end{pmatrix}$. Skriv $\mathbf{v}$ som en lineær kombinasjon av egenvektorene du fant i a), og finn grenseverdien $\lim_n \rightarrow \infty A^n \mathbf{v}$.

Løsning: Vi radreduserer

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 & -6 \\ 3 & 1 & 10 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & 6 \\ 3 & 1 & 10 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & 6 \\ 0 & 4 & -8 \end{pmatrix} \\ \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & 6 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}.$$

Det følger at $\mathbf{v} = 4 \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix} - 2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. Til slutt får vi at

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} A^n \mathbf{v} &= \lim_{n \rightarrow \infty} A^n \left(4 \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix} - 2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right) \\ &= 4 \lim_{n \rightarrow \infty} 0.6^n \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix} - 2 \lim_{n \rightarrow \infty} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Oppgave 6 (6 poeng)

Vi ser på funksjonen $f(x) = \cos x$. Vis at feilen i den symmetriske newtonkvotienten er $\leq \frac{1}{6}h^2$, det vil si at

$$\left| \frac{f(a+h) - f(a-h)}{2h} - f'(a) \right| \leq \frac{1}{6}h^2$$

Hint: Bruk taylorrekker av orden 2 med restledd.

Løsning: For å utlede feilen i den symmetriske newtonkvotienten starter vi med taylorutviklingene

$$\begin{aligned} f(a+h) &= f(a) + f'(a)h + \frac{1}{2}f''(a)h^2 + \frac{1}{6}f'''(c_1)h^3 \\ f(a-h) &= f(a) - f'(a)h + \frac{1}{2}f''(a)h^2 - \frac{1}{6}f'''(c_2)h^3, \end{aligned}$$

der $c_1 \in [a, a+h]$, $c_2 \in [a-h, a]$. Trekker vi disse to fra hverandre, trekker sammen og deler med $2h$ på begge sider får vi

$$\frac{f(a+h) - f(a-h)}{2h} - f'(a) = \frac{1}{12}f'''(c_1)h^2 + \frac{1}{12}f'''(c_2)h^2.$$

tar vi absoluttverdier og bruker trekantulikheten får vi at

$$\begin{aligned} \left| \frac{f(a+h) - f(a-h)}{2h} - f'(a) \right| &\leq \frac{1}{12}|f'''(c_1)|h^2 + \frac{1}{12}|f'''(c_2)|h^2 \\ &\leq \frac{1}{12}h^2 + \frac{1}{12}h^2 = \frac{1}{6}h^2. \end{aligned}$$

Vi brukte her også at $f'''(x) = \sin x$, slik at $|f'''(c_i)| \leq 1$.

Oppgave 7 (6 poeng)

Bruk trapesmetoden med 8 delintervaller for å finne en tilnærming til $\int_0^1 \sin^2(2\pi x) dx$. Hva blir den eksakte verdien for integralet, og hva blir feilen?

(Fortsettes på side 6.)

Løsning: Vi setter $h = 1/8$ og får

$$\begin{aligned} & \int_0^1 \sin^2(2\pi x) dx \\ & \approx \frac{1}{8} \left(\frac{f(0) + f(1)}{2} + f(1/8) + f(1/4) + f(3/8) + f(1/2) + f(5/8) + f(3/4) + f(7/8) \right) \\ & = \frac{1}{8} (1/2 + 1 + 1/2 + 1/2 + 1 + 1/2) = \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Selve integralet blir

$$\int_0^1 \sin^2(2\pi x) dx = \int_0^1 \frac{1}{2} (1 - \cos(4\pi x)) dx = [x/2 - \frac{1}{8\pi} \sin(4\pi x)]_0^1 = \frac{1}{2},$$

slik at metoden er eksakt i dette tilfellet.

Oppgave 8 (6 poeng)

Vi ser på funksjonen $f(x) = (x-1)^3$. Finn det unike polynomet av grad ≤ 2 som interpolerer f i punktene $x_0 = 0$, $x_1 = 1$, og $x_2 = 2$. Hvis vi også la til interpolasjonspunktet $x_3 = 3$, hva blir da det unike polynomet av grad ≤ 3 som interpolerer f ?

Løsning: Vi får at

$$f(x_0) = -1 = c_0$$

$$f(x_1) = 0 = c_0 + c_1$$

$$f(x_2) = 1 = c_0 + 2c_1 + 2c_2$$

Dette gir $c_0 = -1$, $c_1 = 1$, og $c_2 = \frac{1+1-2}{2} = 0$. Dermed får vi at $p_2(x) = -1 + x$. Hvis vi også legger til $x_3 = 3$ så må $p_3(x) = (x-1)^3$, siden f allerede er et polynom av grad ≤ 3 som går igjennom disse punktene, og siden det interpolerende er polynomer unikt.