

UNIVERSITETET I OSLO

Det matematisk-naturvitenskapelige fakultet

Deleksamen i MAT1105 — Lineær algebra og numeriske metoder

Eksamensdag: Torsdag 8. oktober 2026

Tid for eksamen: 9.00 – 11.00

Oppgavesettet er på 9 sider.

Vedlegg: Formelark

Tillatte hjelpemidler: Kalkulator i Inspira

Kontroller at oppgavesettet er komplett før
du begynner å besvare spørsmålene.

Oppgavesettet består av 17 flervalgsoppgaver, og hver av disse teller 1 poeng. Du skal ikke begrunne svarene. Kun ett av svaralternativene er riktig i hver oppgave. Dersom du velger feil svaralternativ, får du 0 poeng for oppgaven.

Oppgave 1

La $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix}$ og $\mathbf{y} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$. Beregn $3\mathbf{x} - 7\mathbf{y}$.

a) $\begin{pmatrix} -16 \\ 20 \\ -10 \end{pmatrix}$

b) $\begin{pmatrix} 18 \\ 19 \\ -11 \end{pmatrix}$

c) $\begin{pmatrix} -17 \\ 18 \\ -10 \end{pmatrix}$

d) $\begin{pmatrix} -15 \\ 13 \\ 7 \end{pmatrix}$

e) $\begin{pmatrix} -17 \\ 19 \\ -12 \end{pmatrix}$

(Fortsettes på side 2.)

Oppgave 2

Hvilket par av følgende vektorer er ortogonale?

a) $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}$ og $\begin{pmatrix} 7 \\ 3 \\ -3 \end{pmatrix}$

b) $\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix}$ og $\begin{pmatrix} 6 \\ 3 \\ -4 \end{pmatrix}$

c) $\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}$ og $\begin{pmatrix} 6 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$

d) $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ og $\begin{pmatrix} 6 \\ 3 \\ -3 \end{pmatrix}$

e) $\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}$ og $\begin{pmatrix} 6 \\ 3 \\ -3 \end{pmatrix}$

Oppgave 3

Vi har matrisene $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 1 & 4 & -1 \end{pmatrix}$ og $B = \begin{pmatrix} -2 & 4 \\ 1 & 0 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$. Hvilket utsagn er riktig?

a) AB er ikke definert

b) $AB = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 2 \\ 3 & -1 & 2 \\ 9 & -3 & 1 \end{pmatrix}$

c) $AB = \begin{pmatrix} 4 & 11 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$

d) $AB = \begin{pmatrix} 7 & -2 \\ 19 & -4 \end{pmatrix}$

e) $AB = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ -11 & 13 \end{pmatrix}$

(Fortsettes på side 3.)

Oppgave 4

La A være en 3×2 -matrise, B en 7×3 -matrise, og C en 2×7 -matrise. Hvilket av følgende utsagn er sant?

- a) Produktet $B^T C^T A$ er definert.
- b) Produktet ABC er definert.
- c) Matrisen CBA er definert
- d) Produktet BAC^T er definert.
- e) Matrisen $A^T B^T C^T$ er en 3×3 -matrise.

Oppgave 5

Punktet på linja $y = 3x$ som ligger nærmest punktet $(2, 8)$ er

- a) $(2.6, 7.8)$
- b) $(1, 3)$
- c) $(1, 10)$
- d) $(-0.6, 0.2)$
- e) $(-1, -3)$

Oppgave 6

Vi har systemet

$$\begin{aligned} -x + 3y + 2z &= 2 \\ -2x + 10y + 3z &= 4 \\ -x + 7y + z &= a \end{aligned}$$

Hvilken påstand er sann?

- a) Systemet har en løsning kun for $a = 0$.
- b) Systemet har en løsning kun for $a = 2$.
- c) Systemet har en løsning kun for $a = 3$.
- d) Systemet har en løsning for alle a .
- e) Systemet har ingen løsning for noen a .

(Fortsettes på side 4.)

Oppgave 7

Hva er den reduserte trappeformen til følgende matrise?

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 & 2 & 3 \\ -2 & 4 & -1 & 2 & -1 \\ 2 & 2 & 5 & 6 & 5 \end{pmatrix}$$

a) $\begin{pmatrix} 1 & -1/2 & 3/2 & 1 & 3/2 \\ 0 & 1 & 2/3 & 4/3 & 2/3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

b) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 1/3 & 5/3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

c) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 11/6 & 5/3 & 11/6 \\ 0 & 1 & 2/3 & 4/3 & 2/3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

d) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}$

e) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Oppgave 8

Hva er pivotsøylene til følgende matrise?

$$\begin{pmatrix} -1 & 3 & 4 & 2 \\ 2 & 1 & 6 & 3 \\ 0 & -2 & 2 & 4 \end{pmatrix}$$

a) søyle 1, 2, og 3

b) søyle 1, 2, og 4

c) søyle 1, 3, og 4

d) søyle 1 og 3

e) søyle 1 og 4

(Fortsettes på side 5.)

Oppgave 9

Anta A er en 7×5 -matrise, og at den reduserte trappeformen til A har 3 pivotelementer. Hvilken påstand er sann?

- a) Systemet $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ har 4 frie variable
- b) A har 2 pivotsøyler.
- c) Systemet $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ har 2 frie variable
- d) Den reduserte trappeformen til A har 3 nullrader
- e) A har 4 pivotrader.

Oppgave 10

Vi har de to systemene

$$\begin{aligned}x_1 - x_2 - 2x_3 &= 1 \\3x_1 - 3x_2 + 2x_3 &= 5 \\5x_1 - 5x_2 + 2x_3 &= 8.\end{aligned}$$

og

$$\begin{aligned}x_1 - x_2 - 2x_3 &= 2 \\3x_1 - 3x_2 + 2x_3 &= 6 \\5x_1 - 5x_2 + 2x_3 &= 2.\end{aligned}$$

Hvilken påstand er sann?

- a) Det første systemet har ingen løsning, mens det andre systemet har uendelig mange løsninger.
- b) Det første systemet har uendelig mange løsninger, mens det andre systemet ikke har noen løsning
- c) Ingen av systemene har noen løsning
- d) Begge systemene har uendelig mange løsninger.
- e) Et av systemene har en unik løsning, det andre har uendelig mange løsninger.

(Fortsettes på side 6.)

Oppgave 11

Vi har matrisen $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Hvilken av følgende uttrykk er en faktorisering av A i elementære matriser?

a) $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

b) $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

c) $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

d) $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

e) $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Hint: Bring A på redusert trappeform, og la den første radoperasjonen være et radbytte. Alternativt kan du gjøre alle matrisemultiplikasjonene i alternativene over, og sammenligne med A .

Oppgave 12

La A , B , og C være mengder. Da har vi at

a) $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$

b) $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup C$

c) $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap C$

d) $(A \cup B \cup C)^c = A^c \cup B^c \cup C^c$

e) Ingen av alternativene over er riktige.

Hint: For å eliminere noen av alternativene kan det være lurt å se på tilfellet der noen av mengdene er $\emptyset$ (den tomme mengde).

(Fortsettes på side 7.)

Oppgave 13

La $f(x) = |x + 2|$. Hvilket av følgende utsagn er sant?

- a) Funksjonen $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ er inverterbar.
- b) Funksjonen $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ er injektiv
- c) Funksjonen $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ er surjektiv.
- d) Funksjonen $f: [-2, 2] \rightarrow [0, 4]$ er bijektiv.
- e) Funksjonen $f: [-4, 4] \rightarrow [0, 6]$ er injektiv.

Oppgave 14

La P , Q , og R være utsagn. Utsagnet $P \vee (Q \wedge R)$

- a) er ekvivalent med $(P \vee Q) \wedge (P \vee R)$
- b) er ekvivalent med $(P \wedge Q) \vee (P \wedge R)$
- c) er ekvivalent med $(P \vee Q) \wedge R$
- d) er ekvivalent med $P \wedge Q \wedge R$
- e) er ikke et gyldig utsagn.

Oppgave 15

Finn negasjonen av følgende utsagn:

For enhver $m \times n$ -matrise A og søylevektor $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^m$, finnes en vektor $\mathbf{c} \in \mathbb{R}^n$ slik at $\mathbf{c}^T A = \mathbf{0}$ og $\mathbf{c}^T \mathbf{b} = 1$.

- a) $\nexists m \times n$ -matrise A , og $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^m, \forall \mathbf{c} \in \mathbb{R}^n, (\mathbf{c}^T A \neq \mathbf{0}) \vee (\mathbf{c}^T \mathbf{b} \neq 1)$.
- b) $\forall m \times n$ -matriser A , og $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^m, \exists \mathbf{c} \in \mathbb{R}^n, (\mathbf{c}^T A = \mathbf{0}) \vee (\mathbf{c}^T \mathbf{b} = 1)$.
- c) $\exists m \times n$ -matrise A , og $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^m, \forall \mathbf{c} \in \mathbb{R}^n, (\mathbf{c}^T A = \mathbf{0}) \wedge (\mathbf{c}^T \mathbf{b} = 1)$.
- d) $\exists m \times n$ -matrise A , og $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^m, \forall \mathbf{c} \in \mathbb{R}^n, (\mathbf{c}^T A \neq \mathbf{0}) \vee (\mathbf{c}^T \mathbf{b} \neq 1)$.
- e) Dette er ikke et gyldig utsagn.

(Fortsettes på side 8.)

Oppgave 16

Vi ser på følgen definert ved at $x_1 = 3$, og $x_{n+1} = \sqrt{x_n + 2}$ for $n \geq 1$. Vi skal se på følgende teorem med bevis

Teorem. For alle $n \geq 2$ har vi at $2 < x_n < 3$, og at $x_n < x_{n-1}$ (slik at x_n er en strengt avtagende følge).

Bevis. Når $n = 2$ er utsagnet sant fordi $x_2 = \sqrt{5}$, og siden $2 < \sqrt{5} < 3$, og $\sqrt{5} = x_2 < x_1 = 3$.

Anta så at påstanden er sann for en gitt $n \geq 2$. Fra $2 < x_n < 3$ følger først at

$$4 < x_n + 2 < 5,$$

og så, ved å ta kvadratrøtter, at

$$2 < \sqrt{x_n + 2} < \sqrt{5}$$

Det følger at $2 < x_{n+1} < \sqrt{5}$. Siden $\sqrt{5} < 3$ følger også at $2 < x_{n+1} < 3$.

Videre, fra $x_n < x_{n-1}$ følger på samme måte først at $x_n + 2 < x_{n-1} + 2$, og deretter at $\sqrt{x_n + 2} < \sqrt{x_{n-1} + 2}$, slik at også $x_{n+1} < x_n$.

Det følger nå at påstanden er sann også for $n + 1$. Påstanden blir dermed sann for alle $n \geq 2$, og beviset er fullført. $\square$

Hvilken av følgende påstander er sann?

- a) Alle induksjonsbevis skal starte på $n = 1$, så beviset er feil.
- b) Grunntilfellet i induksjonsbeviset er feil.
- c) Et av induksjonsstegene er feil.
- d) Teoremet er sant, og beviset er korrekt.
- e) Teoremet er sant, men det er ikke noe induksjonsbevis.

(Fortsettes på side 9.)

Oppgave 17

Vi skal se på følgende utsagn:

La $n \in \mathbb{N}$, og anta at $5n + 2$ er et oddetall. Da er n et oddetall.

Vi skal se på følgende kandidater til beviser for dette utsagnet:

1. Et kontrapositivt bevis: Anta kontrapositivt at n er et partall. Da kan vi skrive $n = 2k$ der $k \in \mathbb{N}$. Men da er $5n + 2 = 10k + 2 = 2(5k + 1)$, som er et partall.
2. Et motsigelsesbevis: Anta $5n + 2$ er et oddetall, og anta for motsigelse at n er et partall. Da er $5n$ også et partall, og da er også $5n + 2$ et partall, som er en motsigelse.
3. Et direkte bevis: Hvis $5n + 2$ er et oddetall så er $5n$ også et oddetall. Men $5n$ er et oddetall hvis og bare hvis n er det. Siden n er et oddetall så er beviset fullført.

Hvilken påstand er riktig?

- a) Utsagnet er usant.
- b) Utsagnet er sant, men det er en feil i det kontrapositive beviset. De to andre bevisene er riktige.
- c) Utsagnet er sant, men det er en feil i motsigelsesbeviset. De to andre bevisene er riktige.
- d) Utsagnet er sant, men det er en feil i det direkte beviset. De to andre bevisene er riktige.
- e) Utsagnet er sant, og alle de tre bevisene er riktige.

SLUTT