

# UNIVERSITETET I OSLO

## Det matematisk-naturvitenskapelige fakultet

Deleksamen i MAT1105 — Lineær algebra og numeriske metoder

Eksamensdag: Fredag 11. oktober

Tid for eksamen: 9.00 – 11.00

Oppgavesettet er på 10 sider.

Vedlegg: Ingen

Tillatte hjelpemidler: Ingen

Kontroller at oppgavesettet er komplett før  
du begynner å besvare spørsmålene.

Oppgavesettet består av 17 flervalgsoppgaver, og hver av disse teller 1 poeng. Du skal ikke begrunne svarene. Kun ett av svaralternativene er riktig i hver oppgave. Dersom du velger feil svaralternativ, får du 0 poeng for oppgaven.

### Oppgave 1

La  $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix}$  og  $\mathbf{y} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}$ . Beregn  $2\mathbf{x} - 3\mathbf{y}$ .

a)  $\begin{pmatrix} -8 \\ -8 \\ -6 \end{pmatrix}$

b)  $\begin{pmatrix} -10 \\ -8 \\ 15 \end{pmatrix}$

c)  $\begin{pmatrix} -2 \\ -3 \\ 7 \end{pmatrix}$

d)  $\begin{pmatrix} 10 \\ 10 \\ -5 \end{pmatrix}$

e)  $\begin{pmatrix} -8 \\ -8 \\ 17 \end{pmatrix}$

**Løsning:** Alternativ e) er riktig.

□

(Fortsettes på side 2.)

## Oppgave 2

La  $\mathbf{a} = (4, 2, 5)$  og  $\mathbf{b} = (1, 2, 2)$ . Da er projeksjonen av  $\mathbf{a}$  ned på  $\mathbf{b}$

- a)  $(2, 4, 4)$
- b)  $(3, 6, 6)$
- c)  $(18, 36, 36)$
- d)  $(2, 6, 8)$
- e)  $(3, 9, 6)$

**Løsning:** Alternativ **a)** er riktig.

□

## Oppgave 3

Vektorproduktet av de to vektorene  $\mathbf{a} = (2, 1, 4)$  og  $\mathbf{b} = (3, 1, 0)$  er

- a)  $\mathbf{a} \times \mathbf{b} = (-4, 12, 2)$
- b)  $\mathbf{a} \times \mathbf{b} = (-4, 12, -1)$
- c)  $\mathbf{a} \times \mathbf{b} = (4, 12, 1)$
- d)  $\mathbf{a} \times \mathbf{b} = (1, 3, 4)$
- e)  $\mathbf{a} \times \mathbf{b} = (1, 3, -4)$

**Løsning:** Alternativ **b)** er riktig.

□

## Oppgave 4

Vi har matrisene  $A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & -1 \\ -2 & -1 & 4 \end{pmatrix}$  og  $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 2 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}$ . Hvilket utsagn er riktig?

- a)  $AB = \begin{pmatrix} 2 & 7 \\ 11 & 6 \end{pmatrix}$
- b)  $AB = \begin{pmatrix} 9 & 6 \\ 11 & 6 \end{pmatrix}$
- c)  $AB = \begin{pmatrix} 9 & 6 \\ 10 & 8 \end{pmatrix}$
- d)  $AB = \begin{pmatrix} 1 & 4 & -1 \\ -1 & 10 & 5 \\ 0 & 14 & 4 \end{pmatrix}$
- e)  $AB$  er ikke definert

**Løsning:** Alternativ **b)** er riktig.

□

(Fortsettes på side 3.)

## Oppgave 5

La  $A \in \mathbb{R}^{3 \times 5}$  og  $B \in \mathbb{R}^{6 \times 3}$ . Hvilket av følgende utsagn er sant?

- a) Produktet  $AB$  er definert.
- b) Ligningen  $BA = C$  har løsningen  $A = B^{-1}C$ .
- c) Matrisen  $B$  inneholder dobbelt så mange komponenter som  $A$ .
- d) Produktet  $A^T B$  er ikke definert.
- e) Ingen av de andre utsagnene er sanne.

**Løsning:** Alternativ **d)** er riktig. Vi har  $A^T \in \mathbb{R}^{5 \times 3}$  og  $B \in \mathbb{R}^{6 \times 3}$ , så  $A^T$  har ikke like mange kolonner (3) som  $B$  har rader (6).

□

## Oppgave 6

For hvilken verdi av  $a$  har følgende system en løsning?

$$2x + 3y + 4z = 5$$

$$2x + 5y + 4z = 7$$

$$4x + 7y + 8z = a$$

- a)  $a = 11$
- b)  $a = 0$
- c)  $a = 6$
- d)  $a = 9$
- e) Det finnes ingen slik  $a$ .

**Løsning:** Alternativ **a)** er riktig.

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 5 & 4 & 7 \\ 4 & 7 & 8 & a \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & a-10 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & a-11 \end{pmatrix}$$

Vi ser at det er bare for  $a = 11$  at siste kolonne ikke blir en pivotkolonne.

□

(Fortsettes på side 4.)

## Oppgave 7

Hva er den reduserte trappeformen til følgende matrise?

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 & 2 \\ 2 & 4 & -1 & 16 \\ 3 & 6 & -5 & 11 \end{pmatrix}$$

a)  $A \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

b)  $A \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

c)  $A \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

d)  $A \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

e)  $A \sim \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

**Løsning:** Alternativ **a)** er riktig. Vi får

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 & 2 \\ 2 & 4 & -1 & 16 \\ 3 & 6 & -5 & 11 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & 12 \\ 0 & 0 & 1 & 5 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

□

## Oppgave 8

Hva er pivotkolonnene til følgende matrise?

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 2 & 4 & 9 \\ -2 & -4 & 1 \\ -3 & -6 & 0 \end{pmatrix}$$

a) kolonne 1 og 3

b) kolonne 1

c) kolonne 2

d) kolonne 1, 2 og 3

e) kolonne 1 og 2

(Fortsettes på side 5.)

**Løsning:** Alternativ **a)** er riktig.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 2 & 4 & 9 \\ -2 & -4 & 1 \\ -3 & -6 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 9 \\ 0 & 0 & 12 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Vi ser at kolonne 1 og 3 er pivotkolonner.

□

(Fortsettes på side 6.)

## Oppgave 9

Hvilken påstand er sann?

- a) I en matrise på redusert trappeform er det alltid kun ett ikke-null element i hver kolonne
- b) I en matrise på redusert trappeform er det kun ett ikke-null element i hver pivotkolonne
- c) Den reduserte trappeformen er ikke unik.
- d) En  $m \times n$ -matrise har alltid  $n$  pivotkolonner
- e) En  $m \times n$ -matrise har alltid  $n$  rader med pivotelement i seg.

**Løsning:** Alternativ b) er riktig.

□

## Oppgave 10

Hva kan vi si om løsningene til følgende ligningssystem?

$$\begin{aligned}3x_1 &= 7 - x_2 \\2x_1 - 3x_2 &= -3 - 4x_3 \\2x_2 - 4 &= 2x_3.\end{aligned}$$

- a) Systemet har ingen løsning.
- b) Systemet har uendelig mange løsninger.
- c) Systemet har én løsning, nemlig  $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 4 \\ -5 \\ -13/2 \end{pmatrix}$ .
- d) Systemet har én løsning, nemlig  $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 6 \\ -11 \\ -12 \end{pmatrix}$ .
- e) Systemet har én løsning, nemlig  $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ .

**Løsning:** Alternativ e) er riktig.

$$\begin{aligned}\begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 & 7 \\ 2 & -3 & 4 & -3 \\ 0 & 2 & -2 & 4 \end{pmatrix} &\sim \begin{pmatrix} 1 & 1/3 & 0 & 7/3 \\ 0 & -11/3 & 4 & -23/3 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1/3 & 0 & 7/3 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1/3 & -1/3 \end{pmatrix} \\ &\sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}\end{aligned}$$

□

(Fortsettes på side 7.)

## Oppgave 11

La  $A \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ . Anta at systemet  $A\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$  har løsningen  $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 5 \\ 6 \\ -3 \end{pmatrix}$ , og at systemet  $A\mathbf{y} = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}$  har løsningen  $\mathbf{y} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$ . Hva kan vi da si om løsningen av systemet  $A\mathbf{z} = \begin{pmatrix} 2 \\ 8 \\ 4 \end{pmatrix}$ ?

- a) Vi kan ikke si noe som helst.
- b) Systemet har løsningen  $\mathbf{z} = \begin{pmatrix} 16 \\ 10 \\ -2 \end{pmatrix}$ .
- c) Systemet har ingen løsninger.
- d) Systemet har uendelig mange løsninger.
- e) Systemet har løsningen  $\mathbf{z} = \begin{pmatrix} 5 \\ -12 \\ 8 \end{pmatrix}$ .

**Løsning:** Alternativ **b)** er riktig. Vi har at

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 8 \\ 4 \end{pmatrix} = 2 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + 2 \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Derfor er løsningen av det siste systemet

$$2 \begin{pmatrix} 5 \\ 6 \\ -3 \end{pmatrix} + 2 \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 16 \\ 10 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

□

## Oppgave 12

La  $A, B, C$  være mengder slik at  $A \subseteq B$ . Hvilket av følgende utsagn er sant?

- a)  $(A \setminus C) \subseteq (B \setminus C)$
- b)  $B \cap C \subseteq A$
- c)  $B \subseteq A \cup C$
- d)  $B \setminus A = A \setminus B$
- e) Ingen av de andre utsagnene er sanne.

**Løsning:** Alternativ **a)** er riktig. Om  $x \in A \setminus C$ , ligger  $x$  i  $A$ , men ikke i  $C$ . Siden  $A \subseteq B$ , ligger  $x$  automatisk også i  $B$ . Altså ligger  $x$  i  $B$ , men ikke i  $C$ .

□

(Fortsettes på side 8.)

### Oppgave 13

La  $f(x) = x^4$ . Hvilket av følgende utsagn er sant?

- a) Funksjonen  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  er surjektiv.
- b) Funksjonen  $f: [-1, 1] \rightarrow [-1, 1]$  er bijektiv.
- c) Funksjonen  $f: [-1, 1] \rightarrow [0, 2]$  er surjektiv men ikke injektiv.
- d) Funksjonen  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  er inverterbar.
- e) Funksjonen  $f: [0, 1] \rightarrow [0, 4]$  er injektiv men ikke surjektiv.

**Løsning:** Alternativ e) er riktig. Om  $x, y \in [0, 1]$  er slik at  $f(x) = f(y)$ , er  $x^4 = y^4$ , og ved å ta fjerderoten (og benytte at  $x, y \geq 0$ ) får vi  $x = y$ . Altså er  $f$  injektiv. Funksjonen er ikke surjektiv, for det finnes ingen  $x \in [0, 1]$  slik at  $x^4 = 4$ .

□

### Oppgave 14

La  $P$  og  $Q$  være utsagn. Finn negasjonen av utsagnet

$$(P \wedge \neg Q) \vee \neg P.$$

- a)  $(\neg P \wedge Q) \vee P$
- b)  $Q$
- c)  $P \wedge Q$
- d)  $Q \Rightarrow P$
- e) Dette er ikke et gyldig utsagn.

**Løsning:** Alternativ c) er riktig. Vi får

$$\begin{aligned} \neg((P \wedge \neg Q) \vee \neg P) &\Leftrightarrow \neg(P \wedge \neg Q) \wedge \neg \neg P \\ &\Leftrightarrow (\neg P \vee \neg \neg Q) \wedge P \\ &\Leftrightarrow (\neg P \vee Q) \wedge P. \end{aligned}$$

Dette er utsagnet “ $P$  er sant, og enten  $Q$  eller  $\neg P$  er sanne”. Men  $P$  og  $\neg P$  kan ikke være sanne samtidig, så det er nødvendigvis  $Q$  som er sann. Vi får altså c).

□

(Fortsettes på side 9.)

## Oppgave 15

Finn negasjonen av følgende utsagn:

For alle positive tall finnes et annet positivt tall som er mindre.

(Alle tall i denne oppgaven er reelle tall.)

a)  $\forall a > 0, \exists x > 0, x \geq a$

b)  $\forall a > 0, \exists x > 0, x < a$

c)  $\forall a > 0, \exists x < a$

d)  $\exists a > 0, \forall x > 0, a \leq x$

e)  $\forall a \leq 0, \exists x \leq 0, x \geq a$

**Løsning:** Alternativ d) er riktig.

□

## Oppgave 16

Vi ser på følgende teorem med bevis.

**Teorem.** For alle  $n \in \mathbb{N}_0$  og alle  $x > 0$  er  $x^n = 1$ . (Her er  $\mathbb{N}_0 = \{0, 1, 2, \dots\}$ .)

*Bevis.* Når  $n = 0$  er utsagnet sant fordi  $x^0 = 1$  for alle  $x > 0$ . Anta så at det stemmer for alle  $n = 0, \dots, m$  for en  $m \in \mathbb{N}_0$ . Om vi setter  $n = m + 1$  får vi

$$x^{m+1} = \frac{x^m \cdot x^m}{x^{m-1}} = \frac{1 \cdot 1}{1} = 1$$

for alle  $x > 0$ .

□

a) Induksjonssteget er feil når  $m = 0$ .

b) Teoremet er sant, og beviset er korrekt.

c) Teoremet er usant, men beviset er korrekt.

d) Induksjonssteget skal starte med  $m = 1$ , ikke  $m = 0$ , så beviset er feil.

e) Vi må gjøre induksjon på  $x$  også, ikke bare på  $n$ , så beviset er ikke fullstendig.

**Løsning:** Alternativ a) er riktig. Når  $m = 0$  har vi skrevet  $x^1 = \frac{x^0 \cdot x^0}{x^{-1}}$ . Det er sant at  $x^0 = 1$ , men ikke at  $x^{-1} = 1$ , slik som det står i beviset.

□

(Fortsettes på side 10.)

## Oppgave 17

Hva kan vi si om følgende utsagn?

La  $x \in \mathbb{R}$ . Hvis  $x^3 - x \geq 0$ , så er  $x \geq -1$ .

a) Utsagnet er usant.

b) Utsagnet er sant, og vi kan bevise det med følgende induksjonsbevis:

Om  $x = 0$  er opplagt  $x^3 - x = 0 \geq 0$ . Anta så at utsagnet er sant for en  $x \in \{0, 1, 2, \dots\}$ . Da er

$$(x+1)^3 - (x+1) = x^3 + 3x^2 + 3x + 1 - x - 1 = \underbrace{x^3 - x}_{\geq 0} + \underbrace{3x^2 + 3x}_{\geq 0} \geq 0,$$

så utsagnet stemmer også for  $x+1$ .

c) Utsagnet er sant, og vi kan bevise det med følgende direkte bevis:

Anta at  $x \in \mathbb{R}$  er slik at  $x^3 - x \geq 0$ . Hvis for eksempel  $x \geq 1$ , så er  $x^3 - x \geq 0$ , som stemmer med antagelsen. Og når  $x \geq 1$ , så er også  $x \geq -1$ , som vi ville vise.

d) Utsagnet er sant, og vi kan bevise det med følgende kontrapositive bevis:

Vi antar kontrapositivt at  $x < -1$ , og vil vise at  $x^3 - x < 0$ . Vi kan skrive

$$x^3 - x = x(x^2 - 1).$$

Siden  $x < -1$  er  $x^2 - 1 > 1 - 1 = 0$ , så vi ser at  $x^3 - x$  er produktet av et negativt tall (altså  $x$ ) og et positivt tall (altså  $x^2 - 1$ ). Altså er  $x^3 - x < 0$ .

e) Ingen av de andre alternativene er riktige.

**Løsning:** Alternativ d) er riktig.

□

SLUTT

(Fortsettes på side 11.)