

UNIVERSITETET I OSLO

Det matematisk-naturvitenskapelige fakultet

Deleksamen i MAT1105 — Lineær algebra og numeriske metoder

Eksamensdag: Prøveeksamen midtveis høst 2025

Tid for eksamen: 9.00 – 11.00

Oppgavesettet er på 11 sider.

Vedlegg: Ingen

Tillatte hjelpemidler: Ingen

Kontroller at oppgavesettet er komplett før
du begynner å besvare spørsmålene.

Oppgavesettet består av 17 flervalgsoppgaver, og hver av disse teller 1 poeng. Du skal ikke begrunne svarene. Kun ett av svaralternativene er riktig i hver oppgave. Dersom du velger feil svaralternativ, får du 0 poeng for oppgaven.

Oppgave 1

La $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 3i \\ 2+i \\ 3-i \end{pmatrix}$ og $\mathbf{y} = \begin{pmatrix} 1-2i \\ 2-3i \\ 2+4i \end{pmatrix}$. Beregn $i\mathbf{x} + 3\mathbf{y}$.

a) $\begin{pmatrix} 2-5i \\ 3+4i \\ 6+14i \end{pmatrix}$

b) $\begin{pmatrix} -6i \\ 6+6i \\ 6+12i \end{pmatrix}$

c) $\begin{pmatrix} 6i \\ 2+6i \\ 2+5i \end{pmatrix}$

d) $\begin{pmatrix} -6i \\ 5-7i \\ 7+15i \end{pmatrix}$

e) $\begin{pmatrix} 1+i \\ 3-2i \\ 6+10i \end{pmatrix}$

(Fortsettes på side 2.)

Løsning: Alternativ **d)** er riktig. Vi har at

$$\begin{aligned} i\mathbf{x} + 3\mathbf{y} &= i \begin{pmatrix} 3i \\ 2+i \\ 3-i \end{pmatrix} + 3 \begin{pmatrix} 1-2i \\ 2-3i \\ 2+4i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ -1+2i \\ 1+3i \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3-6i \\ 6-9i \\ 6+12i \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -3+3-6i \\ -1+2i+6-9i \\ 1+3i+6+12i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6i \\ 5-7i \\ 7+15i \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

□

Oppgave 2

La $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 5 \end{pmatrix}$ og $\mathbf{y} = \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ -5 \end{pmatrix}$. Skalarproduktet $\mathbf{x} \cdot \mathbf{y}$ blir da.

- a) 40
- b) -31
- c) -34
- d) 32
- e) -32

Løsning: Alternativ **e)** er riktig. Vi har at

$$\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ -5 \end{pmatrix} = 1 \cdot (-3) + (-2) \cdot 2 + 5 \cdot (-5) = -3 - 4 - 25 = -32.$$

□

Oppgave 3

La $A = \begin{pmatrix} 4 & 7 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & -1 & -2 \end{pmatrix}$ og $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -3 & -1 \\ -2 & 2 \\ 3 & -4 \end{pmatrix}$. Da er produktet AB

- a) ikke definert
- b) $\begin{pmatrix} 7 & 12 & -3 & 9 \\ -11 & -3 & 2 & 7 \\ -3 & -9 & -3 & 1 \\ 3 & 15 & 6 & -1 \end{pmatrix}$
- c) $\begin{pmatrix} -11 & -6 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$

(Fortsettes på side 3.)

d) $\begin{pmatrix} 8 & 13 & -1 & 6 \\ -14 & -24 & -2 & -8 \\ -4 & -8 & -4 & 0 \\ 4 & 9 & 7 & -2 \end{pmatrix}$

e) $\begin{pmatrix} -13 & -5 \\ -11 & 7 \end{pmatrix}$

Løsning: Alternativ e) er riktig.

□

Oppgave 4

La A være en 4×7 -matrise, B en 3×7 -matrise, og C en 3×6 -matrise. Hvilket av følgende utsagn er sant?

- a) Produktet AB er definert.
- b) Produktet AB^T er definert.
- c) Matrisen BA^T er ikke definert.
- d) Produktet BA er definert.
- e) Matrisen BA^T er kvadratisk.

Løsning: Alternativ b) er riktig.

□

Oppgave 5

Vi har en lineær avbildning $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ som oppfyller

$$T \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix} \qquad T \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Da er matrisen til T

- a) $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$
- b) $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 2 \end{pmatrix}$
- c) $\begin{pmatrix} -8 & 5 \\ -11 & 8 \end{pmatrix}$
- d) $\begin{pmatrix} -11 & 9 \\ -7 & 5 \end{pmatrix}$
- e) $\begin{pmatrix} -11 & 8 \\ -8 & 5 \end{pmatrix}$

(Fortsettes på side 4.)

Løsning: Alternativ **c)** er riktig. Kanskje raskeste måten å løse denne på er å prøve seg frem med matrisene i oppgaven, og gange dem med $(1, 2)$ og $(2, 3)$.

Den systematiske måten å gjøre dette på er som følger. Søylene i matrisen til T er $T(\mathbf{e}_1)$ og $T(\mathbf{e}_2)$. Vi kjenner bare til $T \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ og $T \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$, så la oss forsøke å uttrykke $\mathbf{e}_1$ ved $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ og $\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$:

$$x_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Dette svarer til å løse $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$. På samme måte må vi løse $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$. Disse to systemene kan løses simultant:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 0 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -2 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \end{pmatrix}.$$

Det følger at $\mathbf{e}_1 = -3 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + 2 \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$, og at $\mathbf{e}_2 = 2 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$. Det følger at

$$T(\mathbf{e}_1) = -3T \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + 2T \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} = -3 \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix} + 2 \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -8 \\ -11 \end{pmatrix}$$

$$T(\mathbf{e}_2) = 2T \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} - T \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} = 2 \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 8 \end{pmatrix}.$$

Matrisen blir dermed $\begin{pmatrix} -8 & 5 \\ -11 & 8 \end{pmatrix}$.

□

Oppgave 6

La $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 2 & 4 & 1 \\ -2 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & 4 \end{pmatrix}$, og $\mathbf{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ -1 \\ a \end{pmatrix}$. For hvilken verdi av a har systemet $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ en løsning?

- a) $a = -1$
- b) $a = 2$
- c) $a = 0$
- d) $a = 1$
- e) Det finnes ingen slik a .

(Fortsettes på side 5.)

Løsning: Alternativ c) er riktig. Vi radreduserer den utvidede matrisen

$$\begin{pmatrix} 3 & -1 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 1 & 4 \\ -2 & 3 & 2 & -1 \\ 1 & 2 & 4 & a \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 & a \\ 3 & -1 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 1 & 4 \\ -2 & 3 & 2 & -1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 & a \\ 0 & -7 & -10 & 1-3a \\ 0 & 0 & -7 & 4-2a \\ 0 & 7 & 10 & -1+2a \end{pmatrix} \\ \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 & a \\ 0 & -7 & -10 & 1-3a \\ 0 & 0 & -7 & 4-2a \\ 0 & 0 & 0 & -a \end{pmatrix}$$

Det er klart at siste søyle er en pivotsøyle hvis og bare hvis $a \neq 0$, slik at systemet har en løsning bare når $a = 0$.

□

Oppgave 7

Den reduserte trappeformen til matrisen $\begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 & 10 & 11 \\ 5 & 1 & 1 & 23 & 12 \\ 4 & -1 & 3 & 20 & 18 \end{pmatrix}$ er

a) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$

b) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 1 \end{pmatrix}$

c) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & -7 \end{pmatrix}$

d) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 4 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 4 & 3 \end{pmatrix}$

e) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & -3 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

Løsning: Alternativ d) er riktig.

□

Oppgave 8

Pivotsøylene til matrisen $\begin{pmatrix} 4 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & -2 & 1 & 3 \\ 8 & 10 & 7 & 6 \end{pmatrix}$ er

(Fortsettes på side 6.)

- a) Søyle 1 og 2
- b) Søyle 1 og 3
- c) Søyle 1, 2, og 3
- d) Søyle 1, 2, 3, og 4
- e) Søyle 1, 2, og 4

Løsning: Alternativ a) er riktig.

□

Oppgave 9

Anta A er en matrise. Hvilken påstand er sann?

- a) A kan ha forskjellige reduserte trappeformer - avhengig av hvordan vi radreduserer.
- b) A kan ha forskjellige trappeformer - avhengig av hvordan vi radreduserer.
- c) I den reduserte trappeformen til A kan det være tall $\neq 0$ over de ledende enerne.
- d) i A kan antall pivotrader være forskjellig fra antall pivotsøylar.
- e) $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ må ha en løsning hvis den reduserte trappeformen til A har en nullrad.

Løsning: Alternativ b) er riktig.

□

Oppgave 10

Produktet

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 4 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

er lik

- a) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 4 & 3 & 1 \\ 0 & 5 & 0 \end{pmatrix}$
- b) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 10 & 5 & 0 \\ 10 & 3 & 1 \end{pmatrix}$

(Fortsettes på side 7.)

c) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

d) $\begin{pmatrix} 4 & 7 & 2 \\ 1 & 4 & 2 \\ 2 & -4 & 2 \end{pmatrix}$

e) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 10 & 3 & 1 \\ 10 & 5 & 0 \end{pmatrix}$

Løsning: Alternativ e) er riktig. Vi starter med matrisen $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ lengst til høyre. Ganges denne med matrisen til venstre legges fire ganger rad 1 til rad 3, og da får vi $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 4 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Neste matrise til venstre legger 3 ganger rad 2 til rad 3, og da får vi $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 10 & 3 & 1 \end{pmatrix}$. Neste matrise til venstre ganger opp rad 2 med 5, og da får vi $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 10 & 5 & 0 \\ 10 & 3 & 1 \end{pmatrix}$. Den første matrisen bytter om rad 2 og 3, og da får vi $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 10 & 3 & 1 \\ 10 & 5 & 0 \end{pmatrix}$

□

Oppgave 11

La A være en 4×2 -matrise. Anta at systemet $A\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \\ -1 \end{pmatrix}$ har løsningen

$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, og at systemet $A\mathbf{y} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \\ -3 \end{pmatrix}$ har løsningen $\mathbf{y} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$. Hva kan vi

da si om løsningen av systemet $A\mathbf{z} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$?

a) Systemet har løsningen $\mathbf{z} = \begin{pmatrix} 11 \\ 4 \end{pmatrix}$.

b) Systemet har en unik løsning.

c) Systemet har ingen løsninger.

(Fortsettes på side 8.)

d) Systemet har uendelig mange løsninger.

e) Systemet har løsningen $\mathbf{z} = \begin{pmatrix} 1 \\ 7 \end{pmatrix}$.

Løsning: Alternativ c) er riktig. De to søylene i A er $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \\ -1 \end{pmatrix}$ og $\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \\ -3 \end{pmatrix}$

(siden $A\mathbf{e}_i$ gir søyle i i A). Radreduserer vi den utvidede matrisen (med $A\mathbf{z}$ som høyreside) får vi

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 4 \\ 4 & -1 & 2 \\ -1 & -3 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & -4 & 2 \\ 0 & -9 & -2 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & -4 & 2 \\ 0 & -9 & -2 \end{pmatrix} \\ \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & -11 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Siden siste søyle har en ledende ener så har ikke systemet $A\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$ noen løsning.

□

Oppgave 12

La A og B være delmengder av $\mathbb{R}$. Da er

$$(A \cap B) \cup (A \cap B^c) \cup (A^c \cap B) \cup (A^c \cap B^c)$$

lik

a) $A \cup B$

b) $A \cap B$

c) $\emptyset$ (den tomme mengde)

d) $A^c \cup B^c$

e) hele $\mathbb{R}$

Løsning: Alternativ e) er riktig. Anta $x \in \mathbb{R}$. Da er x i en av $A \cup B$ eller $(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$, slik at $x \in (A \cup B) \cup (A^c \cap B^c)$. Videre er det klart at $A \cup B = (A \cap B) \cup (A^c \cap B) \cup (A \cap B^c)$, og det følger at

$$x \in (A \cap B) \cup (A \cap B^c) \cup (A^c \cap B) \cup (A^c \cap B^c).$$

Mengden inneholder derfor alle reelle tall.

□

(Fortsettes på side 9.)

Oppgave 13

La $f(x) = 1 - (1/(x - 1))$. Hvilket av følgende utsagn er sant?

- a) f er veldefinert som funksjon fra $\mathbb{R}$ til $\mathbb{R}$.
- b) Funksjonen $f: (1, \infty) \rightarrow (1, \infty)$ er bijektiv.
- c) Funksjonen $f: (1, \infty) \rightarrow (-\infty, 1)$ er inverterbar.
- d) Funksjonen $f: (1, 2) \rightarrow (-\infty, 1)$ er surjektiv.
- e) Hvis vi definerer f på $\mathbb{R} \setminus \{1\}$ (d.v.s. alle punkter bortsett fra $x = 1$), så er ikke f injektiv.

Løsning: Alternativ c) er riktig.

□

Oppgave 14

La P , Q , R , og S være utsagn. Utsagnet

$$\neg((P \wedge \neg Q) \vee (R \wedge \neg S))$$

er ekvivalent med

- a) $(P \vee Q) \wedge (R \vee S)$
- b) $\neg P \wedge Q \wedge \neg R \wedge S$
- c) $\neg P \vee Q \vee \neg R \vee S$
- d) $(\neg P \wedge Q) \vee (\neg R \wedge S)$
- e) $(\neg P \vee Q) \wedge (\neg R \vee S)$

Løsning: Alternativ e) er riktig. Vi bruker De Morgans lover:

$$\begin{aligned} \neg((P \wedge \neg Q) \vee (R \wedge \neg S)) &\iff \neg(P \wedge \neg Q) \wedge \neg(R \wedge \neg S) \\ &\iff (\neg P \vee Q) \wedge (\neg R \vee S) \end{aligned}$$

□

Oppgave 15

La A være en mengde. Finn negasjonen av følgende utsagn:

For alle punkter a i A finnes det en $r > 0$ slik at for alle x som oppfyller $|x - a| \leq r$, så er $x \in A$.

- a) $\forall a \in A, \forall r > 0, \exists x, |x - a| \leq r, x \notin A$.
- b) $\exists a \in A, \exists r > 0, \exists x, |x - a| \leq r, x \notin A$.
- c) $\forall a \in A, \exists r > 0, \forall x, |x - a| \leq r, x \notin A$

(Fortsettes på side 10.)

d) $\exists a \in A, \forall r > 0, \exists x, |x - a| \leq r, x \in A$

e) $\exists a \in A, \forall r > 0, \exists x, |x - a| \leq r, x \notin A$

Løsning: Alternativ e) er riktig.

□

Oppgave 16

Vi ser på følgende teorem med bevis.

Teorem. For alle $n \in \mathbb{N}$ har vi at

$$\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \cdots + \frac{1}{n(n+1)} = \frac{3}{2} - \frac{1}{n}.$$

Bevis. Når $n = 1$ er utsagnet sant fordi venstresiden blir $1/(1 \cdot 2) = 1/2$, og høyresiden blir $3/2 - 1 = 1/2$.

Anta så at utsagnet er sant for alle $n = 1, \dots, m$ (der $m \in \mathbb{N}$). Vi skal vise at for $n = m + 1$ så er

$$\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \cdots + \frac{1}{n(n+1)} = \frac{3}{2} - \frac{1}{n+1}. \quad (1)$$

Bruker vi induksjonsantagelsen så er venstresiden

$$\frac{3}{2} - \frac{1}{n} + \frac{1}{n(n+1)} = \frac{3}{2} + \frac{1 - (n+1)}{n(n+1)} = \frac{3}{2} + \frac{-n}{n(n+1)} = \frac{3}{2} - \frac{1}{n+1}$$

og beviset er fullført.

□

- a) Utsagnet er ikke sant for $n = 1$.
- b) Teoremet er sant, og beviset er korrekt.
- c) Teoremet er usant, men beviset er korrekt.
- d) Induksjonssteget inneholder en feil. Nærmere bestemt burde siste ledd på venstresiden i Likning (1) vært $\frac{1}{(n+1)(n+2)}$.
- e) Teoremet er sant, men det er ikke noe induksjonsbevis.

Løsning: Alternativ d) er riktig. Utsagnet er feil for $n = 2$. Da blir venstresiden $2/3$, høyresiden 1.

□

(Fortsettes på side 11.)

Oppgave 17

Vi ser på følgende utsagn.

For alle $n \in \mathbb{N}$ så er $n^2 + n + 11$ et primtall.

Hvilket av følgende alternativer er riktig?

- a) Utsagnet er sant, og vi kan bevise det med følgende induksjonsbevis:
Når $n = 1$ er utsagnet sant fordi venstresiden blir $1^2 + 1 + 11 = 13$, som er et primtall. Anta så at påstanden er sann for $m = 1, \dots, n$. Vi må se på tilfellet $m = n + 1$. Vi regner ut
- $$(n+1)^2 + (n+1) + 11 = n^2 + 2n + 1 + n + 1 + 11 = n^2 + n + 11 + 2n + 2.$$
- Siden $n^2 + n + 11$ er et primtall ≥ 11 så må det være et oddetall. Siden et odde primtall pluss et partall gir et nytt odde primtall, er påstanden også sann for $m = n + 1$.
- b) Utsagnet er sant, og vi kan bevise det med følgende direkte bevis.
Vi har at $n^2 + n + 11 = 11 + n(n + 1)$. Dette er et primtall siden et odde primtall pluss et partall ($n(n + 1)$ er et partall) gir et nytt odde primtall.
- c) Utsagnet er sant for $n = 1, 2, \dots, 9$, og er derfor også sant for alle n .
- d) Utsagnet er usant.
- e) Ingen av de andre alternativene er riktige.

Løsning: Alternativ **d)** er riktig. **a)** og **b)** er feilaktige bevis, begge bruker at et odde primtall pluss et partall gir et nytt odde primtall, som lett kan sees er feil $5 + 10 = 15$. **c)** er feil siden tilfellet $n = 10$ gir $n^2 + n + 11 = 121$, som ikke er et primtall. Påstanden er sann for $n = 1, \dots, 9$, men det hjelper ikke når påstanden er usann når $n = 10$.

□

SLUTT