UNIVERSITETET I OSLO

Det matematisk-naturvitenskapelige fakultet

Deleksamen i: MAT1110 — Kalkulus og lineær algebra.

Eksamensdag: Fredag 18. mars 2016.

Tid for eksamen: 11:00 – 13:00.

Oppgavesettet er på 5 sider.

Vedlegg: Formelark

Tillatte hjelpemidler: Ingen.

Kontroller at oppgavesettet er komplett før du begynner å besvare spørsmålene.

Kandidatnr. _________

Eksamen består av 15 oppgaver. De 10 første teller 3 poeng hver, mens de 5 siste teller 4 poeng hver slik at den totale poengsummen er 50. Det er bare ett riktig alternativ på hver oppgave. Dersom du svarer feil eller lar være å svare på en oppgave, får du 0 poeng. Du blir altså ikke "straffet" for å gjette. Svarene fører du inn på dette svararket. Krysser du av mer enn ett alternativ på en oppgave, får du 0 poeng. *Lykke til!*

Oppgave	Alt. a)	Alt. b)	Alt. c)	Alt. d)	Alt. e)	Poengverdi
1						3 poeng
2						3 poeng
3						3 poeng
4						3 poeng
5						3 poeng
6						3 poeng
7						3 poeng
8						3 poeng
9						3 poeng
10						3 poeng
11						4 poeng
12						4 poeng
13						4 poeng
14						4 poeng
15						4 poeng

(Fortsettes på side 2.)

Oppgave 1. (3 poeng) La $\boldsymbol{F}:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$ være en avbildning slik at $\boldsymbol{F}(0,0)=(0,0)$ og $\boldsymbol{F}'(0,0)=\left(\begin{smallmatrix}2 & -1\\ 1 & 0\end{smallmatrix}\right)$. La $g:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ være en funksjon slik at $\left(\frac{\partial g}{\partial x}(0,0),\frac{\partial g}{\partial y}(0,0)\right)=(1,-1)$. Da blir $\left(\frac{\partial h}{\partial x}(0,0),\frac{\partial h}{\partial y}(0,0)\right)$ for den sammensatte funksjonen $h(x,y)=g(\boldsymbol{F}(x,y))$:

a) $(-1,1)$ b) $(2,1)$ c) $(0,0)$ d) $(1,2)$ e) $(1,-1)$

Oppgave 2. (3 poeng) En parametrisert kurve er gitt ved

$$\boldsymbol{r}(t)=t\cos t\,\boldsymbol{i}+t\sin t\,\boldsymbol{j}.$$

Akselerasjonen $\boldsymbol{a}(t)$ er da

a) $-t\cos t\,\boldsymbol{i}-t\sin t\,\boldsymbol{j}$
b) $(2\sin t+t\cos t)\boldsymbol{i}+(2\cos t+t\sin t)\boldsymbol{j}$
c) $(2\sin t-t\cos t)\boldsymbol{i}+(-2\cos t-t\sin t)\boldsymbol{j}$
d) $(-2\sin t-t\cos t)\boldsymbol{i}+(2\cos t-t\sin t)\boldsymbol{j}$
e) $(\cos t-t\sin t)\boldsymbol{i}+(\sin t+t\cos t)\boldsymbol{j}$

Oppgave 3. (3 poeng) En vaier har form av en kurve parametrisert ved

$$\boldsymbol{r}(t)=\cos t\,\boldsymbol{i}+\sin t\,\boldsymbol{j}+t^2\,\boldsymbol{k},\,,\ 0\le t\le 1.$$

Hvis tettheten til vaieren i punktet (x,y,z) er gitt ved $f(x,y,z)=8\sqrt{z}$, så blir massen til vaieren

a) $\frac{1}{3}(5\sqrt{5}-1)$ b) 1 c) $\sqrt{2}$ d) $\frac{2}{3}(5\sqrt{5}-1)$ e) $5\sqrt{5}-1$

Oppgave 4. (3 poeng) En potensialfunksjon ϕ til vektorfeltet

$$\boldsymbol{F}(x,y,z)=(2xy+2xz)\boldsymbol{i}+(x^2+z)\boldsymbol{j}+(x^2+y)\boldsymbol{k}$$

er gitt ved

a) $\phi(x,y,z)=x^2y+y^2z+z^2x$
b) $\phi(x,y,z)=x^2+x^2z+xy$
c) $\phi(x,y,z)=x^2+y^2+z^2$
d) $\phi(x,y,z)=z^2+y^2z+xz$
e) $\phi(x,y,z)=x^2y+x^2z+yz$

(Fortsettes på side 3.)

Oppgave 5. (3 poeng) Tangentplanet til funksjonen

$$f(x, y) = x^2 \cos(\pi x) - 2y^2$$

i punktet $(1, 1)$ er gitt ved

a) $z = -3 + 2(x - 1) + 4(y - 1)$
b) $z = -3 - 2(x - 1) - 4(y - 1)$
c) $z = 3 - 2(x + 1) - 4(y + 1)$
d) $z = -3 + 2(x - 1)$
e) $z = -3 - \pi(x - 1) - 2(y - 1)$

Oppgave 6. (3 poeng) La A være området i $\mathbb{R}^2$ gitt ved $0 \leq y \leq 1$ og $e^{-y} \leq x \leq e^y$. Dobbeltintegralet $\iint_A e^y \, dx \, dy$ er lik:

a) $\frac{1}{2}e^2 - \frac{3}{2}$ b) $e + \frac{1}{e}$ c) 1 d) $2e - 1$ e) $e - \frac{1}{e}$

Oppgave 7. (3 poeng) Skjæringen mellom kurven $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ og planet $z = x + 1$ gir en

a) Sirkel b) Ellipse c) Parabel d) Hyperbel e) Tom mengde

Oppgave 8. (3 poeng) La $\boldsymbol{F}$ være affinavbildningen fra $\mathbb{R}^2$ til $\mathbb{R}^2$ som speiler om punktet $(1, 1)$ (det vil si at vi $\boldsymbol{F}$ avbilder $\boldsymbol{x}$ på det andre punktet som ligger på linjen gjennom $\boldsymbol{x}$ og $(1, 1)$, og som har samme avstand til $(1, 1)$). Da er

a) $\boldsymbol{F}(x, y) = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$
b) $\boldsymbol{F}(x, y) = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}$
c) $\boldsymbol{F}(x, y) = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}$
d) $\boldsymbol{F}(x, y) = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$
e) $\boldsymbol{F}(x, y) = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

Oppgave 9. (3 poeng) Hvis R er rektangelet $R = [-1, 1] \times [0, 1]$ så er dobbeltintegralet $\iint_R (x^2 + 2xy) \, dx \, dy$ lik:

a) 0 b) $\frac{2}{3}$ c) $\frac{4}{3}$ d) 2 e) $\frac{8}{3}$

(Fortsettes på side 4.)

Oppgave 10. (3 poeng) Når vi skifter integrasjonsrekkefølge i integralet

$$\int_{\frac{1}{2}}^{1}\left[\int_{\frac{1}{x}}^{3-2x} f(x,y)\,\mathrm{d}y\right]\mathrm{d}x$$

får vi

$$\text{a)}\ \int_{1}^{2}\left[\int_{\frac{1}{y}}^{\frac{3-y}{2}} f(x,y)\,\mathrm{d}x\right]\mathrm{d}y$$

$$\text{b)}\ \int_{1}^{\frac{1}{2}}\left[\int_{3-2x}^{\frac{1}{x}} f(x,y)\,\mathrm{d}y\right]\mathrm{d}x$$

$$\text{c)}\ \int_{\frac{1}{2}}^{1}\left[\int_{\frac{1}{y}}^{3-2y} f(x,y)\,\mathrm{d}x\right]\mathrm{d}y$$

$$\text{d)}\ \int_{\frac{1}{x}}^{3-2x}\left[\int_{\frac{1}{2}}^{1} f(x,y)\,\mathrm{d}x\right]\mathrm{d}y$$

$$\text{e)}\ \int_{1}^{2}\left[\int_{\frac{3-y}{2}}^{\frac{1}{y}} f(x,y)\,\mathrm{d}x\right]\mathrm{d}y$$

Oppgave 11. (4 poeng) Vi har gitt vektorfeltet

$$\boldsymbol{F}(x,y,z) = x^2\,\boldsymbol{i} + y^2\,\boldsymbol{j} + z^2\,\boldsymbol{k}.$$

Hvis kurven $\mathcal{C}$ er parametrisert ved

$$\boldsymbol{r}(t) = \cos t\,\boldsymbol{i} + \sin t\,\boldsymbol{j} + t(2\pi - t)\,\boldsymbol{k},\ 0 \le t \le 2\pi,$$

så blir $\int_{\mathcal{C}} \boldsymbol{F}\cdot d\boldsymbol{r}$

a) $2+\pi$ b) 3 c) 2π d) 0 e) 4

Oppgave 12. (4 poeng) La R være rektangelet $R = [0,1]\times[1,3]$ og la $f(x,y) = 8x+4y$. Arealet til grafen $\{(x,y,z)\,|\,z = f(x,y)\}$ over R er

a) 2 b) 12 c) 6 d) 8 e) 18

(Fortsettes på side 5.)

Oppgave 13. (4 poeng) Hva slags kjeglesnitt får vi som løsningen på ligningen

$$-9x^2 - 36x + 4y^2 - 32y - 8 = 0?$$

a) En hyperbel med sentrum i $(-2, 4)$, med brennpunkter $(-2, 4 - \sqrt{13})$ og $(-2, 4 + \sqrt{13})$.
b) En hyperbel med sentrum i $(-2, 4)$, med brennpunkter $(-2 - \sqrt{13}, 4)$ og $(-2 + \sqrt{13}, 4)$.
c) En ellipse med sentrum i $(-2, 4)$ med brennpunkter $(-2, 4 + \sqrt{5})$ og $(-2, 4 - \sqrt{5})$.
d) En ellipse med sentrum i $(-2, 4)$ med brennpunkter $(-2 + \sqrt{5}, 4)$ og $(-2 - \sqrt{5}, 4)$.
e) En parabel med sentrum i $(2, -4)$ og brennpunkt $(2, -5)$.

Oppgave 14. (4 poeng) Volumet til området avgrenset av paraboloiden $z = x^2 + x + y^2 - 3y$ og planet $z = 4 + x - 3y$ er:

a) 8π b) $\frac{32\pi}{3}$ c) 4π d) $\frac{24\pi}{5}$ e) 2π

Oppgave 15. (4 poeng) La $\mathcal{C}$ være den parametriserte kurven $\mathbf{r(t)} = \mathbf{2}\cos\theta\,\mathbf{i} + \mathbf{2}\sin\theta\,\mathbf{j}$, hvor $\theta \in [0, 2\pi]$. Regn ut integralet

$$\int_{\mathcal{C}} (y + e^{x^2})\,\mathrm{d}x + (2x + y + \sin e^y)\,\mathrm{d}y$$

a) $\sin e^4$ b) 4π c) e^4 d) 4 e) $\frac{\pi}{4}$

SLUTT.