Forside

MAT 1110 Kalkulus og lineær algebra

Mandag 21. mars 2022
Kl. 09.00 – 11.00 (2 timer)

Vedlegg: Formelsamling og kandidatinstruks
Tillatte hjelpemidler: Ingen

Eksamen består av 15 oppgaver og alle oppgavene teller likt. Midtveiseksamen bidrar med $\frac{1}{3}$ av den endelige karakteren i emnet.
Det er bare ett riktig svaralternativ på hver oppgave. Dersom du svarer feil eller lar være å svare på en oppgave, får du 0 poeng på den oppgaven. Du blir altså ikke "straffet" for å gjette.

1 Elementære matriser

Hvilket av alternativene uttrykker den inverse til matrisen

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$$

som et produkt av elementære matriser?
Velg ett alternativ:

- $A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$
- $A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$
- $A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$
- $A^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$
- $A^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$

Maks poeng: 1

2 Egenverdier

Egenverdiene til matrisen

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$$

er gitt ved

Velg ett alternativ:

- $\lambda_1 = 1$ og $\lambda_2 = 2$
- $\lambda = -1 \pm 3i$
- $\lambda_1 = -1$ og $\lambda_2 = 3$
- $\lambda = 1$ med multiplisitet 2
- $\lambda = 2$ med multiplisitet 2

Maks poeng: 1

3 Egenvektorer

Hvilken av følgende påstander om egenverdiene/egenvektorene til en matrise er ikke riktig?

Velg ett alternativ:

- Hvis $\mathbf{v_1}$ er en egenvektor med egenverdi $\lambda_1$og $\mathbf{v_2}$ en egenvektor med egenverdi λ_2, så er $\lambda_2\mathbf{v_1} + \lambda_1\mathbf{v_2}$ en egenvektor med egenverdi $\lambda_1\lambda_2$
- Egenvektorer for forskjellige egenverdier er lineært uavhengige
- En symmetrisk matrise har reelle egenverdier
- Hvis $\mathbf{v}$ er en egenvektor for en matrise, så er også $a\mathbf{v}$ en egenvektor for matrisen for alle $a \neq 0$
- Alle røttene til matrisens karakteristiske polynom er egenverdier

Maks poeng: 1

4 Karakteristisk polynom

Det karakteristiske polynomet til matrisen

$$A = \begin{pmatrix} -2 & -6 & 3 \\ 0 & 2 & 0 \\ -1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

er gitt ved

Velg ett alternativ:

- $\chi_A(\lambda) = (\lambda + 1)^2(\lambda + 2)$
- $\chi_A(\lambda) = \lambda^3 + 2\lambda^2 - \lambda + 2$
- $\chi_A(\lambda) = \lambda^3 - 2\lambda^2 - \lambda + 2$
- $\chi_A(\lambda) = (\lambda - 1)(\lambda + 1)(\lambda + 2)$
- $\chi_A(\lambda) = \lambda^3 + 2\lambda^2 + \lambda + 2$

Maks poeng: 1

5 Løsning av likningssystemer

La A være 3×3-matrisen

$$A = \begin{pmatrix} -2 & -6 & 3 \\ 0 & 2 & 0 \\ -1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

Hvilken av følgende påstander er sann?

Velg ett alternativ:

- Den reduserte trappeformen til A har kun en pivotsøyle
- Determinanten til A er 0
- Den reduserte trappeformen til A har ingen pivotsøyler
- Likningen $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ har kun løsningen $\mathbf{x} = \mathbf{0}$
- Likningen $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ har uendelig mange løsninger for alle valg av $\mathbf{b}$

Maks poeng: 1

6 Determinanter

Hvilken av følgende påstander om determinanten til en kvadratisk matrise A er ikke riktig?

Velg ett alternativ:

- Hvis vi kan skrive $A = A_1 + A_2$ der $\det A_1 = \det A_2 = 0$ så er $\det A = 0$
- Dersom A har en hel søyle med 0-er, så er $\det A = 0$
- Determinanten til en ortogonal matrise er ± 1
- $\det(A^2) = (\det A)^2$
- Determinanten til den transponerte matrisen A^T er lik determinanten til A

Maks poeng: 1

7 Kjeglesnitt

Hva slags kjeglesnitt får vi som løsningen av likningen

$$-4x^2 + 8x + y^2 - 4y + 4 = 0$$

Velg ett alternativ:

- En ellipse med sentrum i $(2, 1)$ og halvakser $a = 2$ og $b = 1$
- En hyperbel med sentrum i $(2, 1)$ og med asymptoter $y - 1 = \pm 2(x - 2)$
- En parabel med brennpunkt i $(1, 1)$ og styrelinje $y = -1$
- En hyperbel med sentrum i $(1, 2)$ og med asymptoter $y - 2 = \pm 2(x - 1)$
- En ellipse med sentrum i $(1, 2)$ og halvakser $a = 2$ og $b = 1$

Maks poeng: 1

8 Tangentplan

Tangentplanet til flaten $f(x, y, z) = x + yz - y + z^2 - 4 = 0$ i punktet $(1, -1, 2)$ har likning

Velg ett alternativ:

- $x + y - 3z = -6$
- $x - y - 3z = -4$
- $x + y - 3z = 6$
- $x + y + 3z = 6$
- $x - y + 3z = 8$

Maks poeng: 1

9 Buelengde

Buelengden B til kurven $\mathbf{r}(t) = \cos t\,\mathbf{i} + 2\mathbf{j} + \sin t\,\mathbf{k}$, $1 \leq t \leq 3$ er gitt ved
Velg ett alternativ:

- $B = 3$
- $B = 5$
- $B = 1$
- $B = 2$
- $B = 4$

Maks poeng: 1

10 Potensialfunksjon

En potensialfunksjon ϕ til vektorfeltet
$\mathbf{F}(x, y, z) = (yz + yz^2)\,\mathbf{i} + (xz + xz^2)\,\mathbf{j} + (xy + 2xyz)\,\mathbf{k}$ er gitt ved
Velg ett alternativ:

- $\phi(x, y, z) = xyz + xyz^2 + 2$
- $\phi(x, y, z) = xy + yz^2 + x^2 + 3$
- $\phi(x, y, z) = xy^2 + 2y^2z + 1$
- $\phi(x, y, z) = xy^2 + yz^2 + 4$
- $\phi(x, y, z) = xy + yz$

Maks poeng: 1

11 Linjeintegral av skalarfelt

Regn ut linjeintegralet

$$L = \int_C f\, ds$$

når $f(x,y) = xy$ og kurven C er parametrisert ved $\mathbf{r}(t) = 3t\,\mathbf{i} + 4t\,\mathbf{j}, \quad t \in [0,2]$

Velg ett alternativ:

- $L = 40$
- $L = 160$
- $L = 320$
- $L = 80$
- $L = 20$

Maks poeng: 1

12 Linjeintegral av vektorfelt

Regn ut linjeintegralet

$$L = \int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$$

når $\mathbf{F}(x,y) = y\,\mathbf{i} + x\,\mathbf{j}$ og kurven C er parametrisert ved $\mathbf{r}(t) = 2t\,\mathbf{i} - 3t\,\mathbf{j}, \quad t \in [1,3]$

Velg ett alternativ:

- $L = 0$
- $L = 48$
- $L = -48$
- $L = -36$
- $L = 36$

Maks poeng: 1

13 Integral av konservativt felt

La $\mathcal{C}$ være den parametrisere kurven $\mathbf{r}(\theta) = 2\cos\theta\,\mathbf{i} + 2\sin\theta\,\mathbf{j}, \quad t \in [0, 2\pi]$
Regn ut integralet

$$L = \int_{\mathcal{C}} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$$

hvor $\mathbf{F}$ er vektorfeltet gitt ved $\mathbf{F}(x, y) = (y + 2\cos(2x) + ye^{xy})\,\mathbf{i} + (x + xe^{xy})\,\mathbf{j}$

Velg ett alternativ:

- 1
- -2
- 0
- -1
- 2

Maks poeng: 1

14 Dobbeltintegral

Vi har gitt et dobbeltintegral

$$A = \iint_Q (4xy + \cos x)\,dx\,dy$$

der $Q = [0, \pi] \times [0, 2]$. Hva er verdien av A?

Velg ett alternativ:

- $A = 4 + 4\pi$
- $A = 4 + 4\pi^2$
- $A = 4\pi$
- $A = 4\pi^2$
- $A = 4$

Maks poeng: 1

15 Tyngdepunkt

Et område A i (x, y)-planet er gitt ved

$$0 \leq x \leq 5 - 5y^2, \quad -1 \leq y \leq 1$$

Da er massemiddelpunktet til A gitt ved

Velg ett alternativ:

- $(\overline{x}, \overline{y}) = (\frac{8}{3}, 0)$
- $(\overline{x}, \overline{y}) = (\frac{5}{2}, 0)$
- $(\overline{x}, \overline{y}) = (2, 0)$
- $(\overline{x}, \overline{y}) = (\frac{10}{3}, 0)$
- $(\overline{x}, \overline{y}) = (3, 0)$

Maks poeng: 1