Forside

MAT 1110 Kalkulus og lineær algebra

Mandag 21. mars 2022
Kl. 15.00 – 17.00 (2 timer)

Vedlegg: Formelsamling og kandidatinstruks
Tillatte hjelpemidler: Ingen

Eksamen består av 15 oppgaver og alle oppgavene teller likt. Midtveiseksamen bidrar med $\frac{1}{3}$av den endelige karakteren i emnet.
Det er bare ett riktig svaralternativ på hver oppgave. Dersom du svarer feil eller lar være å svare på en oppgave, får du 0 poeng på den oppgaven. Du blir altså ikke "straffet" for å gjette.

1 Elementære matriser

Hvilket av alternativene uttrykker den inverse til matrisen

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

som et produkt av elementære matriser?
Velg ett alternativ:

- $A^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$
- $A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$
- $A^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$
- $A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -4 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$
- $A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

Maks poeng: 1

2 Egenverdier

Egenverdiene til matrisen

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$$

er gitt ved

Velg ett alternativ:

- $\lambda_1 = -1$ og $\lambda_2 = 3$
- $\lambda = -1 \pm 3i$
- $\lambda_1 = 1$ og $\lambda_2 = 2$
- $\lambda = 1$ med multiplisitet 2
- $\lambda = 2$ med multiplisitet 2

Maks poeng: 1

3 Egenvektorer

Hvilken av følgende påstander om egenverdiene/egenvektorene til en matrise er ikke riktig?

Velg ett alternativ:

- En matrise og dens transponerte har de samme egenverdiene
- En symmetrisk $n \times n$-matrise har alltid n forskjellige egenverdier
- Hvis λ er en egenverdi for en matrise, så er også λ^2 en egenverdi for kvadratet av matrisen
- Hvis $\mathbf{v_1}$og $\mathbf{v_2}$ er egenvektorer med forskjellig egenverdi λ_2, så er ikke $\mathbf{v_1} - \mathbf{v_2}$ noen egenvektor
- Egenvektorer for forskjellige egenverdier er lineært uavhengige

Maks poeng: 1

4 Karakteristisk polynom

Det karakteristiske polynomet til matrisen

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 4 \\ 2 & -3 & 7 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

er gitt ved

Velg ett alternativ:

- $\chi_A(\lambda) = (\lambda - 1)(\lambda + 1)(\lambda + 2)$
- $\chi_A(\lambda) = (\lambda + 1)^2(\lambda - 2)$
- $\chi_A(\lambda) = \lambda^3 - \lambda^2 - 8\lambda + 2$
- $\chi_A(\lambda) = \lambda^3 + \lambda^2 + 8\lambda + 2$
- $\chi_A(\lambda) = \lambda^3 + \lambda^2 - 8\lambda - 2$

Maks poeng: 1

5 Løsning av likningssystemer

La A være 3×3-matrisen

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & -4 \\ 3 & 0 & 6 \end{pmatrix}$$

Hvilken av følgende påstander er sann?

Velg ett alternativ:

- Likningen $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ har kun løsningen $\mathbf{x} = \mathbf{0}$
- Den reduserte trappeformen til A har kun en pivotsøyle
- Likningen $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ har uendelig mange løsninger for alle valg av $\mathbf{b}$
- Determinanten til A er 0
- Den reduserte trappeformen til A har ingen pivotsøyler

Maks poeng: 1

6 Determinanter

Hvilken av følgende påstander om determinanten til en kvadratisk $n \times n$-matrise A er ikke riktig?

Velg ett alternativ:

- Determinanten A^{-1}er gitt ved $\frac{1}{\det A}$
- Hvis egenverdiene til A er $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$, så er $\det A = \lambda_1 \cdots \lambda_n$
- Dersom A har to like rader, så er $\det A = 0$
- $\det\left(A^T\right) = \det A$
- Hvis A er en elementær matrise så er $\det A = 1$

Maks poeng: 1

7 Kjeglesnitt

Hva slags kjeglesnitt får vi som løsningen av likningen

$$4x^2 - 16x - y^2 + 2y + 11 = 0$$

Velg ett alternativ:

- En hyperbel med sentrum i $(1, 2)$og med asymptoter $y - 2 = \pm 2(x - 1)$
- En ellipse med sentrum i $(1, 2)$og halvakser $a = 2$ og $b = 1$
- En parabel med brennpunkt i $(1, 1)$og styrelinje $y = -1$
- En hyperbel med sentrum i $(2, 1)$og med asymptoter $y - 1 = \pm 2(x - 2)$
- En ellipse med sentrum i $(2, 1)$og halvakser $a = 2$ og $b = 1$

Maks poeng: 1

8 Tangentplan

Tangentplanet til flaten $f(x, y, z) = 2y^2 + x^3 - xz - 1 = 0$ i punktet $(1, -1, 2)$ har likning

Velg ett alternativ:

- $x - 4y - z = 3$
- $x + 4y - z = -3$
- $x - 4y + z = 7$
- $x + 4y - z = -5$
- $x + 4y + z = -1$

Maks poeng: 1

9 Kopi av Buelengde

Buelengden B til kurven $\mathbf{r}(t) = t^3\,\mathbf{i} + \frac{\sqrt{6}}{2}t^2\mathbf{j} + t\,\mathbf{k}, \quad 0 \leq t \leq 1$ er gitt ved

Velg ett alternativ:

- $B = 1$
- $B = 4$
- $B = 2$
- $B = 3$
- $B = 5$

Maks poeng: 1

10 Potensialfunksjon

En potensialfunksjon ϕ til vektorfeltet $\mathbf{F}(x, y, z) = (2x + y)\,\mathbf{i} + (x + z^2)\,\mathbf{j} + 2yz\,\mathbf{k}$ er gitt ved
Velg ett alternativ:

- $\phi(x, y, z) = xy + yz^2 + x^2 + 3$
- $\phi(x, y, z) = xy + yz$
- $\phi(x, y, z) = xy^2 + yz^2 + 4$
- $\phi(x, y, z) = xy^2 + 2y^2z + 1$
- $\phi(x, y, z) = xyz + xyz^2 + 2$

Maks poeng: 1

11 Linjeintegral av skalarfelt

Regn ut linjeintegralet

$$L = \int_{\mathcal{C}} f \, ds$$

når $f(x,y) = 2x + \frac{3}{4}y^2$ og $\mathcal{C}$ er parametrisert ved $\mathbf{r}(t) = 3t\,\mathbf{i} - 4t\,\mathbf{j}, \quad t \in [0,1]$

Velg ett alternativ:

- $L = 49$
- $L = 42$
- $L = 35$
- $L = 56$
- $L = 28$

Maks poeng: 1

12 Linjeintegral av vektorfelt

Regn ut linjeintegralet

$$L = \int_{\mathcal{C}} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$$

når $\mathbf{F}(x,y) = x\,\mathbf{i} + y\,\mathbf{j}$ og kurven $\mathcal{C}$ er parametrisert ved $\mathbf{r}(t) = t\,\mathbf{i} - 2t\,\mathbf{j}, \quad t \in [0,2]$

Velg ett alternativ:

- $L = 20$
- $L = 10$
- $L = 25$
- $L = 15$
- $L = 5$

Maks poeng: 1

13 Integral av konservativt felt

La $\mathcal{C}$ være den parametrisere kurven

$$\mathbf{r}(\theta) = 2\cos\theta\,\mathbf{i} + 2\sin\theta\,\mathbf{j}, \quad t \in [0, 2\pi]$$

Regn ut integralet

$$L = \int_{\mathcal{C}} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$$

hvor $\mathbf{F}$ er vektorfeltet gitt ved $\mathbf{F}(x, y) = (x^3 + 2y + \sin^2 x)\,\mathbf{i} + (2x + \ln y + e^{-y})\,\mathbf{j}$

Velg ett alternativ:

- 0
- 2
- -1
- 1
- -2

Maks poeng: 1

14 Dobbeltintegral

Vi har gitt et dobbeltintegral

$$A = \iint_Q (6x^2 y + 4x\sin y)\,dx\,dy$$

der $Q = [0, 1] \times [0, 2\pi]$. Hva er verdien av A?

Velg ett alternativ:

- $A = 4\pi^2$
- $A = 4\pi$
- $A = 4 + 4\pi$
- $A = 4 + 4\pi^2$
- $A = 4$

Maks poeng: 1

15 Tyngdepunkt

Et område A i (x, y)-planet er gitt ved

$$-1 \leq x \leq 1, \quad 0 \leq y \leq x^2$$

Da er massemiddelpunktet til A gitt ved

Velg ett alternativ:

- $(\overline{x}, \overline{y}) = (0, \frac{2}{5})$
- $(\overline{x}, \overline{y}) = (0, \frac{1}{4})$
- $(\overline{x}, \overline{y}) = (0, \frac{3}{10})$
- $(\overline{x}, \overline{y}) = (0, \frac{3}{8})$
- $(\overline{x}, \overline{y}) = (0, \frac{3}{5})$

Maks poeng: 1