UNIVERSITETET I OSLO

Det matematisk-naturvitenskapelige fakultet

Eksamen i:	MAT1110 — Kalkulus og lineær algebra
Eksamensdag:	19. mars 2025
Tid for eksamen:	9:00 – 11:00
Oppgavesettet er på 6 sider.	
Vedlegg:	Formelsamling
Tillatte hjelpemidler:	Ingen

Kontroller at oppgavesettet er komplett før
du begynner å besvare spørsmålene.

Svarene føres i Inspera.

Eksamen består av 15 oppgaver og alle oppgavene teller likt. Midtveiseksamen bidrar med 1/3 av den endelige karakteren i emnet. Det er bare ett riktig alternativ på hver oppgave. Dersom du svarer feil eller lar være å svare på en oppgave, får du 0 poeng på den oppgaven. Du blir altså ikke "straffet" for å gjette. Lykke til!

Oppgave 1

Determinanten til matrisen

$$\begin{pmatrix} -1 & 2 & 3 \\ 3 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

er lik

(a) 24

(b) -6

(c) -4

(d) -22

(e) -12

Oppgave 2

Matriseproduktet

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 2 \\ 0 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -5 & 3 \end{pmatrix}$$

er lik

(Fortsettes på side 2.)

(a) $\begin{pmatrix} 7 & -1 \\ 7 & 12 \\ 20 & -12 \end{pmatrix}$

(b) $\begin{pmatrix} 7 & 1 \\ -7 & 12 \\ 20 & -12 \end{pmatrix}$

(c) $\begin{pmatrix} 5 & 1 \\ -7 & 6 \\ 2 & -12 \end{pmatrix}$

(d) $\begin{pmatrix} 4 & 1 \\ -7 & 10 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$

(e) $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -7 & 4 \\ 20 & 3 \end{pmatrix}$

Oppgave 3

La A og B være inverterbare $n \times n$ matriser. Da er $(A^{-1}B)^{-1}$ alltid lik

(a) AB

(b) $A^{-2}B^{-1}$

(c) $B^{-1}A^{-2}$

(d) $B^{-1}A$

(e) AB^{-1}

Oppgave 4

Anta $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ er en deriverbar funksjon og

$$\mathbf{a} = (2, -3), \quad \nabla f(\mathbf{a}) = (-2, 5), \quad \mathbf{r} = (1, 4).$$

Da er den retningsderiverte $f'(\mathbf{a}; \mathbf{r})$ lik

(a) -10

(b) 10

(c) -19

(d) 18

(e) 22

(Fortsettes på side 3.)

Oppgave 5

Funksjonen

$$f(x, y) = 2xy^2 - 3y$$

vokser i punktet $(1, -2)$ hurtigst i retningen gitt av vektoren

(a) $(-8, 5)$

(b) $(8, -5)$

(c) $(4, -11)$

(d) $(4, 11)$

(e) $(8, -11)$

Oppgave 6

La $f(x, y, z) = z\cos(x - y^2)$. Den annenordens partiellderiverte $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial z}$ er da

(a) $\cos(-2y)$

(b) $2y\sin(x - y^2)$

(c) $\cos(x - y^2) - z\sin(x - y^2)$

(d) $-2y\cos(x - y^2)$

(e) 0

Oppgave 7

La

$$\mathbf{F}(x, y, z) = (xz^2, 3z\ln y).$$

Jacobi-matrisen $\mathbf{F}'(x, y, z)$ er da lik

(a) $\begin{pmatrix} z^2 & 0 \\ 0 & 0 \\ 2xz & \frac{3z}{y} \end{pmatrix}$

(b) $\begin{pmatrix} z^2 & 0 \\ 0 & \frac{3z}{y} \\ 2xz & 3\ln y \end{pmatrix}$

(c) $\begin{pmatrix} z^2 & 0 & 2xz \\ 3\ln y & \frac{3z}{y} & 0 \end{pmatrix}$

(d) $\begin{pmatrix} 0 & \frac{3z}{y} & 3\ln y \\ z^2 & 0 & 2xz \end{pmatrix}$

(e) $\begin{pmatrix} z^2 & 0 & 2xz \\ 0 & \frac{3z}{y} & 3\ln y \end{pmatrix}$

(Fortsettes på side 4.)

Oppgave 8

Vi har to deriverbare funksjoner $\mathbf{F} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ og $\mathbf{G} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$. Anta at $\mathbf{F}(-1, 2, 8) = (3, 1)$ og at

$$\mathbf{F}'(-1, 2, 8) = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 \\ -1 & 0 & -3 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{G}'(3, 1) = \begin{pmatrix} -3 & 2 \\ 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Jacobi-matrisen til den sammensatte funksjonen $\mathbf{H}(\mathbf{x}) = \mathbf{G}(\mathbf{F}(\mathbf{x}))$ i punktet $(-1, 2, 8)$ er da

(a) $\begin{pmatrix} -5 & -9 & 0 \\ -1 & 3 & -8 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$

(b) $\begin{pmatrix} -5 & -1 & 1 \\ -9 & 3 & 0 \\ 0 & -8 & 3 \end{pmatrix}$

(c) $\begin{pmatrix} -5 & -9 & -12 \\ 3 & 0 & -8 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$

(d) $\begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 10 & 1 \end{pmatrix}$

(e) $\begin{pmatrix} 0 & 10 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$

Oppgave 9

La $\mathbf{F} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ være gitt ved

$$\mathbf{F}(x, y) = \begin{pmatrix} xy^3 + 2 \\ x^2 + y \end{pmatrix}.$$

Linearisering av $\mathbf{F}$ i punktet $(1, -1)$ er da

(a) $\begin{pmatrix} -x + 3y + 4 \\ 2x + y + 1 \end{pmatrix}$

(b) $\begin{pmatrix} x + 3y + 5 \\ 2x + y + 1 \end{pmatrix}$

(c) $\begin{pmatrix} -x + 3y + 5 \\ 2x + y - 1 \end{pmatrix}$

(d) $\begin{pmatrix} -x + 2y + 5 \\ 2x + y + 1 \end{pmatrix}$

(e) $\begin{pmatrix} -x + 3y + 5 \\ 2x + y + 1 \end{pmatrix}$

(Fortsettes på side 5.)

Oppgave 10

Akselerasjonen til kurven $\mathbf{r}(t) = (t^3, 2t^2, 3t)$ er

(a) $(3t, 2, 0)$

(b) $(6t, 2, 0)$

(c) $(3t, 4, 0)$

(d) $(6t, 4, 0)$

(e) $(t, 0, 0)$

Oppgave 11

Buelengden til kurven

$$\mathbf{r}(t) = (e^t \cos t, e^t \sin t), \quad 0 \leq t \leq 2$$

er

(a) $\sqrt{2}e^2$

(b) $\sqrt{2}(e^2 - 1)$

(c) $2(e^2 - 1)$

(d) $\sqrt{2}(e^4 - 1)$

(e) $2(e^4 - 1)$

Oppgave 12

La $\mathcal{C}$ være kurven parametrisert ved

$$\mathbf{r}(t) = (3t, 4t), \quad -1 \leq t \leq 1,$$

og la $f(x, y) = x^3 y$. Da er linjeintegralet $\int_{\mathcal{C}} f \, ds$ lik

(a) 108

(b) 180

(c) 216

(d) 135

(e) 90

(Fortsettes på side 6.)

Oppgave 13

La $\mathcal{C}$ være kurven parametrisert ved

$$\mathbf{r}(t) = (e^t, e^{-2t}), \quad 0 \leq t \leq 1,$$

og la $\mathbf{F}$ være vektorfeltet gitt ved

$$\mathbf{F}(x, y) = (y, -3x).$$

Da er linjeintegralet $\int_{\mathcal{C}} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$ lik

(a) $7 - 7e^{-1}$

(b) $7 + 7e^{-1}$

(c) $5e^{-1} - 5$

(d) $5e^{-1} + 5$

(e) $7 - 5e^{-1}$

Oppgave 14

Vektorfeltet

$$\mathbf{F}(x, y, z) = (y^2 \sin z, 2xy \sin z - e^{-y}, xy^2 \cos z)$$

har en potensialfunksjon ϕ gitt ved

(a) $\phi(x, y, z) = xy^2 \sin z - e^{-y}$

(b) $\phi(x, y, z) = xy^2 \sin z + e^{-y}$

(c) $\phi(x, y, z) = -xy^2 \sin z + e^{-y}$

(d) $\phi(x, y, z) = xy^2 \cos z + e^{-y}$

(e) $\phi(x, y, z) = xy^2 \cos z - e^{-y}$

Oppgave 15

Likningen

$$y^2 - 8x + 6y + 17 = 0$$

beskriver

(a) en ellipse med sentrum $(1, -3)$ og halvakser $\frac{1}{2\sqrt{2}}$ og 1.

(b) en hyperbel med sentrum $(-1, 3)$ og halvakse 1.

(c) en hyperbel med sentrum $(1, -3)$ og halvakse 1.

(d) en parabel med toppunkt $(-1, 3)$ og brennpunkt $(1, 3)$.

(e) en parabel med toppunkt $(1, -3)$ og brennpunkt $(3, -3)$.

SLUTT